Secundaria

Fidel Sánchez Sandoval

Matemáticas 3

Construcción del pensamiento

Serie
Evolución

FERNÁNDEZ editores

Sistema de clasificación Melvil Dewey

510
S26
2017

Sánchez Sandoval, Fidel
Matemáticas 3 : Construcción del pensamiento / Fidel Sánchez Sandoval.
— México : Fernández educación, 2017.
272 p. : il.

ISBN: 978-607-498-476-7

1. Matemáticas. 2. Estudio y enseñanza.

Se contó con la participación del equipo pedagógico de Fernández educación:

Sandra Cara Camarena
Laura Arzola Guerra
Juan Carlos Tobón Gutiérrez
Marco Augusto Aguirre Muciño
Fernando César Arce Valentín
Cruz Antonio Guevara Sánchez
Arturo Hernández Guerrero
Pedro Tapia Pacheco
Claudia D. Jiménez Avilés
Enrique Trejo Ávila
Claudia Brenda Camacho López
Iván Arturo Márquez Hernández

¿Sugerencias o comentarios?

¡Contáctanos!

55 5090 7700 ext. 7480
www.fernandezeditores.com.mx
www.social.adiactiva.com.mx
secundaria@fernandezeditores.com.mx

Avenida Insurgentes Sur Núm. 2453 Piso 12, Colonia Tizapán, Delegación Álvaro Obregón, C.P. 01090, Ciudad de México.

MATEMÁTICAS 3
CONSTRUCCIÓN DEL PENSAMIENTO
POR FIDEL SÁNCHEZ SANDOVAL
PRIMERA EDICIÓN, ABRIL 2014
QUINTA REIMPRESIÓN DE LA PRIMERA EDICIÓN, ENERO 2017

ISBN: 978-607-498-476-7

Esta obra se terminó de imprimir en el mes de enero de 2017 en los talleres de Compañía Editorial Ultra, S.A. de C.V. Centeno 162-2, Col. Granjas Esmeralda, C.P. 09810, Ciudad de México.

IMPRESO EN MÉXICO – PRINTED IN MEXICO

Prólogo

La formación de los mexicanos del siglo XXI requiere que en la educación secundaria se realicen actividades progresivas que permitan el tránsito de los estudiantes hacia la apropiación del lenguaje matemático, tanto para explicar procedimientos y resultados, como para ampliar y profundizar sus conocimientos. El objetivo es generar un empleo eficiente de estas herramientas, avanzando desde la solución de problemas con ayuda hasta el trabajo autónomo.

Se requiere que profesores y estudiantes desarrollen formas de pensar que les permitan formular conjeturas y procesos para resolver problemas, elaborar explicaciones de los hechos numéricos, algebraicos, geométricos y probabilísticos.

Esta obra tiene la intención de proveer una cultura matemática a los estudiantes de tercer grado de educación secundaria, quienes inician una nueva etapa en su vida, en la cual habrá interrogantes y muchos cambios en su forma de pensar y de comprender la realidad.

La conjugación de diversos factores, como la planificación de las actividades de enseñanza y de aprendizaje por parte del docente y el trabajo colaborativo de los estudiantes, motivará la consecución del desarrollo de sus competencias en la materia y les permitirá alcanzar a los alumnos el perfil requerido en esta etapa.

La obra pretende ser un instrumento para potenciar las habilidades matemáticas de los estudiantes y un material de apoyo para el docente en la planeación de la enseñanza. Está diseñada con el propósito de que el alumno, a través del análisis y de la reflexión sobre las situaciones problemáticas planteadas, contraste sus conocimientos, se involucre en la búsqueda de soluciones y construya nuevos saberes, a la vez que contribuye al desarrollo del pensamiento matemático de sus compañeros de grupo. Además de fomentar el desarrollo del pensamiento científico, los estudiantes necesitan una perspectiva amplia del mundo en el que viven y la sociedad a la que pertenecen, por ello se incluyen diversas actividades centradas en situaciones de relevancia social, así como en problemáticas actuales de nuestra sociedad.

Esperamos que, con el apoyo de este libro y de sus profesores, los estudiantes desarrollen una cultura matemática que les permita elevar sus capacidades.

Palabras al profesor

El presente libro de ***Matemáticas 3. Construcción del pensamiento*** se ha elaborado para apoyarte en la realización de tu trabajo docente.

Este texto es una invitación para que organices y apliques una gran variedad de procesos educativos y de aprendizaje matemático, que permita a tus alumnos desarrollar competencias matemáticas verdaderamente consolidadas y que se puedan aplicar, con actitudes positivas, en la solución de situaciones problemáticas que se presentan en diferentes contextos.

Las actividades que aquí se plantean te permitirán:

1. Organizar y planear las actividades de tus estudiantes para que logren las competencias y aprendizajes esperados que se establecen en el currículum.
2. Desarrollar los contenidos matemáticos propios de este grado escolar.
3. Lograr que los estudiantes desarrollen su pensamiento matemático, de tal manera que puedan usar expresiones matemáticas para analizar y resolver situaciones problemáticas en diversos contextos socioculturales.
4. Propiciar que los estudiantes utilicen técnicas adecuadas para reconocer, plantear y resolver problemas de manera autónoma.
5. Conseguir que los estudiantes asuman actitudes positivas hacia el estudio y práctica de las matemáticas.
6. Organizar y articular acciones colaterales que impulsen el desarrollo curricular en tu escuela, así como la mejora cotidiana de las prácticas docentes.

Matemáticas 3. Construcción del pensamiento contiene una serie de actividades individuales y colectivas, situaciones problemáticas para recordar los conocimientos previos e iniciar la construcción de nuevos saberes, así como problemas y actividades para desarrollar y consolidar las competencias matemáticas; actividades de evaluación, que te permitirán organizar e integrar situaciones didácticas para que tus alumnos reciban una educación matemática de calidad.

Se sugiere que, en general, cada contenido matemático se desarrolle en cinco sesiones de estudio y algunas actividades extra clase. En ese sentido, las sesiones se esquematizan de la siguiente manera:

- Sesión 1. Actividades iniciales
- Sesiones 2 y 3. Construyo mis conocimientos y habilidades
- Sesión 4. Revisión de las actividades realizadas
- Sesión 5. Evaluación formativa

Aunado a tu experiencia profesional, este texto se puede convertir en uno de los motores que posibilite la construcción del pensamiento matemático de tus estudiantes.

Palabras al alumno

El libro ***Matemáticas 3. Construcción del pensamiento*** se elaboró con la finalidad primordial de apoyarte en tus estudios de matemáticas en la educación secundaria; considerando que debes fortalecer y desarrollar las competencias matemáticas, así como tu pensamiento matemático.

Aquí encontrarás situaciones problemáticas a partir de las cuales podrás aplicar tus aprendizajes, construir nuevos conocimientos y desarrollar tus habilidades matemáticas. Tanto las actividades como el desarrollo de los contenidos se organizan en cinco bloques, cada uno se estructura en tres ejes temáticos fundamentales: Sentido numérico y pensamiento algebraico; Forma, espacio y medida; y Manejo de la información. El desarrollo de todas las actividades planteadas toma en cuenta las actitudes hacia las matemáticas que, como estudiante, vas a aplicar y fortalecer.

A lo largo del libro encontrarás diferentes situaciones problemáticas, cuya solución requiere de la aplicación de los conocimientos matemáticos que adquiriste de manera previa, del análisis y reflexión sobre el problema planteado y de la construcción de otros conocimientos y habilidades matemáticas, que son el motivo de estudio en este texto. Resolver los ejercicios y problemas te permitirá desarrollar y consolidar las siguientes competencias matemáticas:

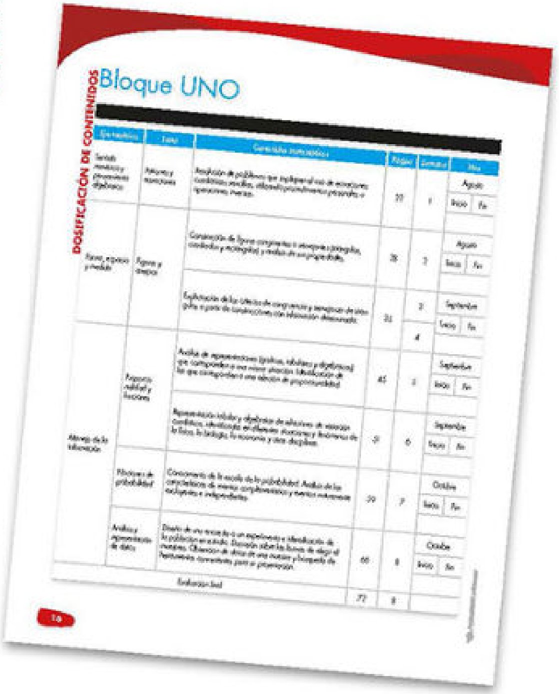
1. *Resolver problemas de manera autónoma.* Para que identifiques, plantees y resuelvas diferentes tipos de situaciones problemáticas y seas capaz de formular otros problemas que se puedan resolver con estrategias semejantes a las ya estudiadas.
2. *Validar procedimientos y resultados.* Para que seas capaz de encontrar una o varias maneras de resolver cada problema que se te plantea y construyas explicaciones que justifiquen el procedimiento y el resultado obtenido.
3. *Comunicar información matemática.* Para que comprendas las diferentes maneras en que se puede expresar y representar la información matemática contenida en una situación problemática.
4. *Manejar técnicas eficientemente.* Para que uses correctamente los procedimientos y formas de representación de expresiones matemáticas, con la finalidad de efectuar cálculos y desarrollar tu sentido numérico y pensamiento matemático.

En ese sentido, te invitamos a que leas, analices y reflexiones en torno a cada una de las situaciones problemáticas planteadas, y a que busques las soluciones pertinentes, las justifiques y las comuniques a tus compañeros y a tu profesor, para que sean validadas.

El esfuerzo que realices se verá reflejado en el éxito de tus estudios.

El autor

Guía de uso



A continuación se explican de manera sencilla y detallada las secciones, cápsulas y elementos que forman parte de tu libro ***Matemáticas 3. Construcción del pensamiento.***

Dosificación de contenidos

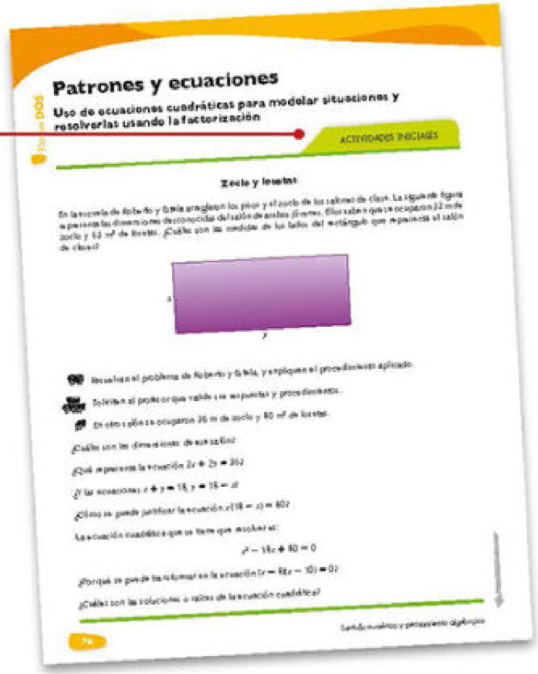
Antes de iniciar con los bloques se incluyen tablas de dosificación de contenidos en las que se presentan los temas y su distribución por páginas para facilitar la organización e integración de situaciones didácticas.

Organización de contenidos por bloques

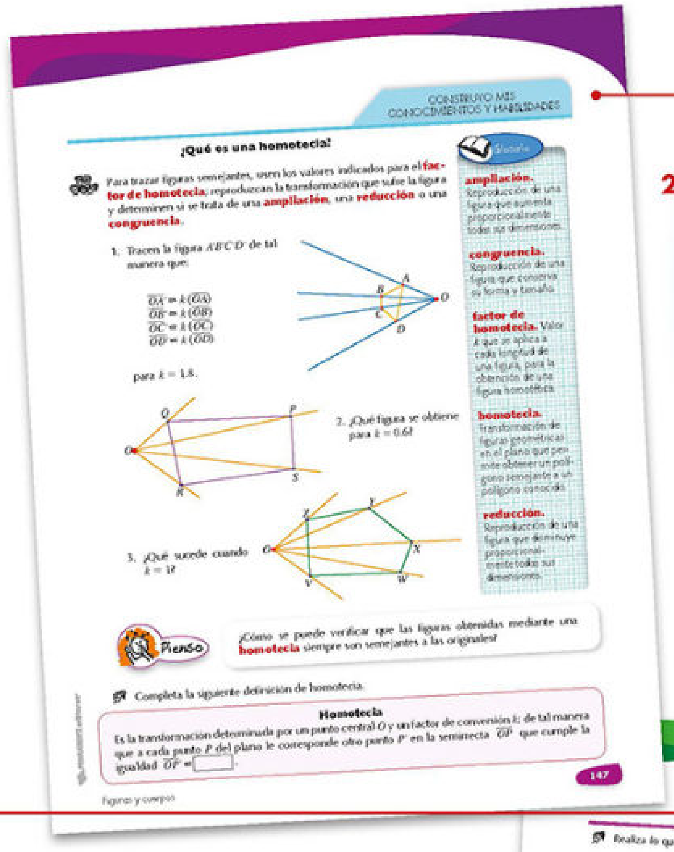
Los contenidos programáticos se dividen en cinco bloques temáticos. Cada uno inicia mencionando las competencias matemáticas que se fortalecerán y los aprendizajes esperados.

Contenidos matemáticos

Cada bloque está constituido por temas, que a su vez, incluyen secciones y cápsulas que te permitirán construir tus conocimientos. A continuación se describen dichos elementos.

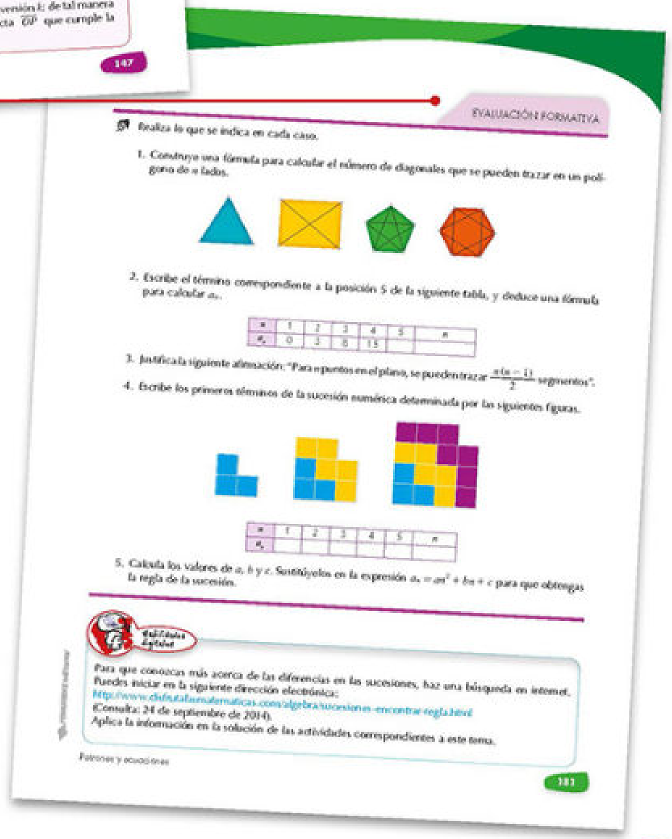


1. Actividades iniciales. En esta sección se incluye una situación problemática cuyo propósito es introducirte al estudio de los contenidos matemáticos que se abordarán.

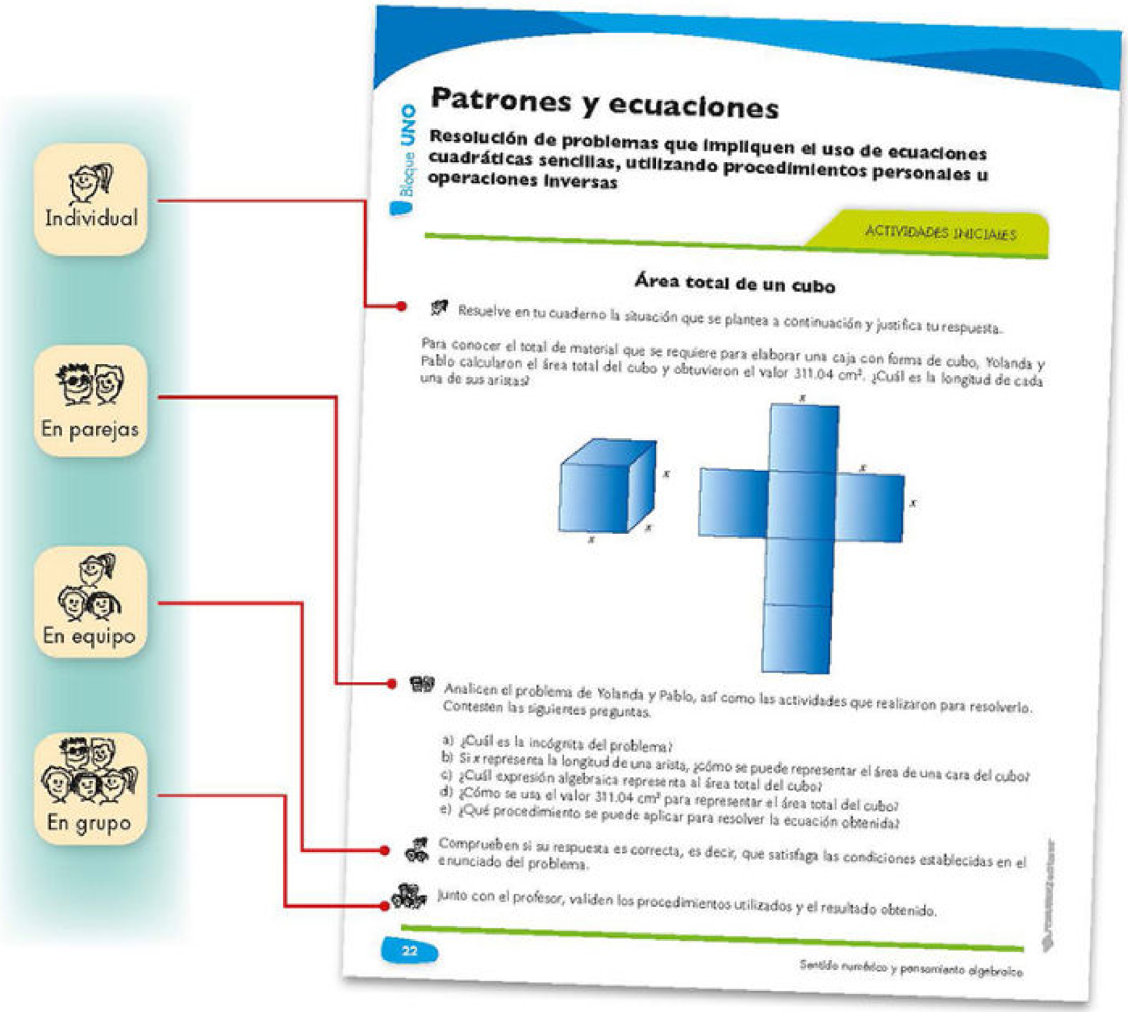


2. Construyo mis conocimientos y habilidades. En esta sección se presenta el desarrollo de los contenidos matemáticos mediante actividades de estudio que te ayudarán a construir y desarrollar tu pensamiento matemático.

3. Evaluación formativa. Aquí encontrarás una evaluación individual al final de cada tema tratado. La finalidad de esta sección es que enfrentes nuevos retos que te permitan resolver problemas de manera autónoma, comunicar información matemática, manejar técnicas eficientemente, además de validar procedimientos y resultados.



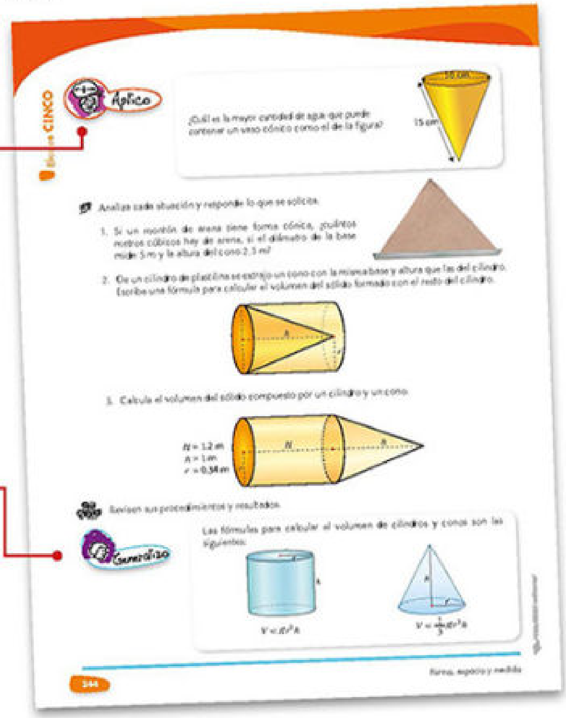
4. Actividades individuales, en pareja, en equipo y en grupo. Las situaciones problemáticas, ejercicios y retos que se presentan, tienen la intención de promover tu participación colaborativa y crítica. Asimismo, buscan que tanto tú como tus compañeros socialicen sus conocimientos y reflexiones sobre lo que van aprendiendo. Con la finalidad de impulsar el desarrollo de tu pensamiento matemático, las actividades fomentan que propongas argumentos y procedimientos para discutirlos en pareja, grupo o equipo y así mostrar su validez en la resolución de problemas y la interpretación gráfica o simbólica de los resultados obtenidos.



5. Cápsulas. Tienen la finalidad de enfatizar aspectos matemáticos que requieren un análisis o grado de abstracción y comprensión más profundo.

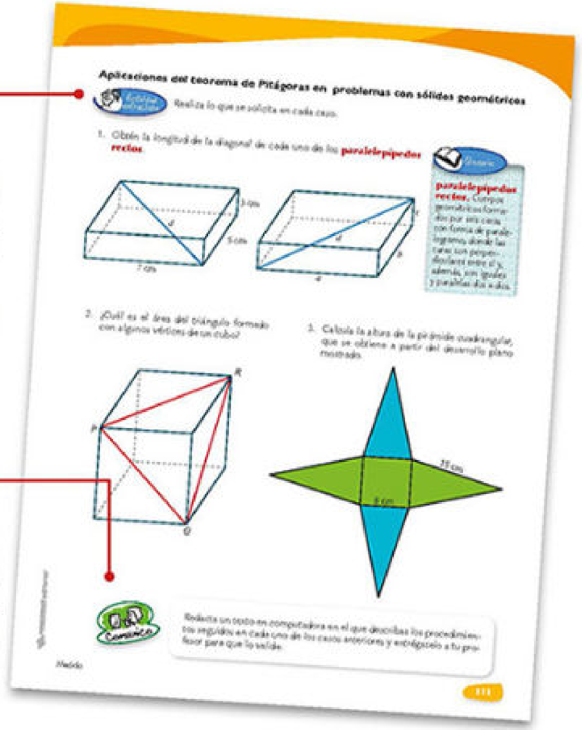
Aplico
En esta cápsula se incluye una situación problematizadora para que pongas en práctica los conocimientos que has adquirido.

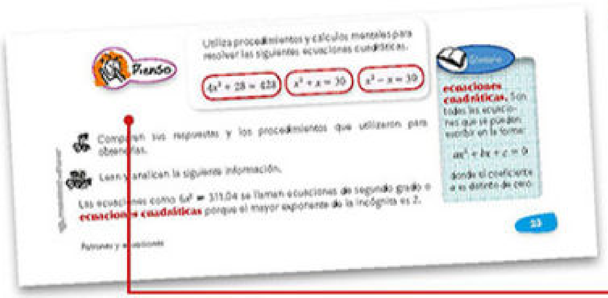
Generalizo
Cápsula con información cuyo objetivo es generalizar los principales resultados a partir de contenidos estudiados y las actividades realizadas.



Actividad extraclase
Incluye sugerencias de actividades para complementar los temas y ejercicios revisados en clase, cuya finalidad es reforzar y aplicar lo aprendido fuera del salón.

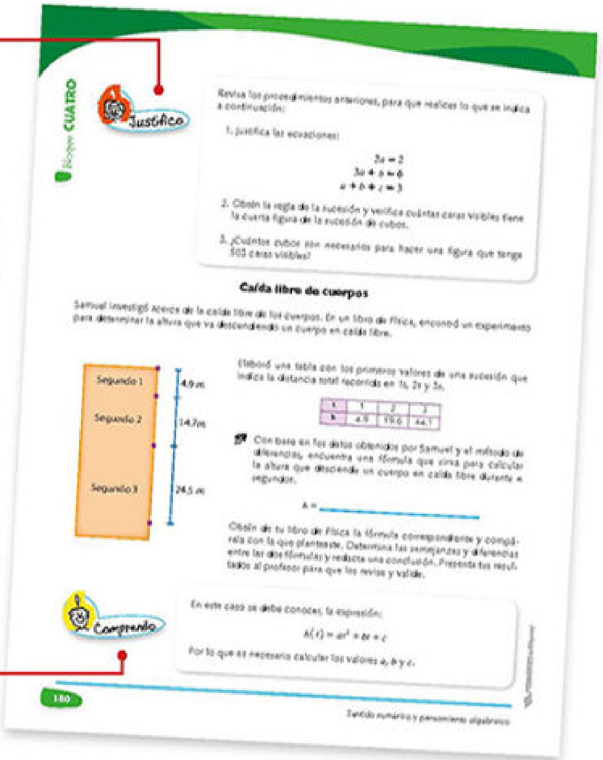
Comunico
En esta cápsula se solicita que redactes un escrito o reporte con el propósito de que plasmes con tus propias palabras los conocimientos adquiridos a lo largo de una sesión.



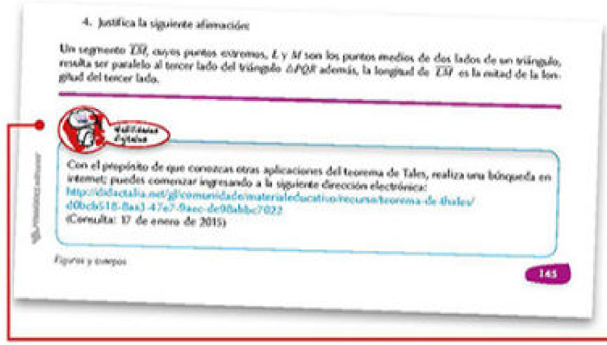


Pienso
Incluye una actividad que te permitirá poner en práctica lo que has aprendido con anterioridad.

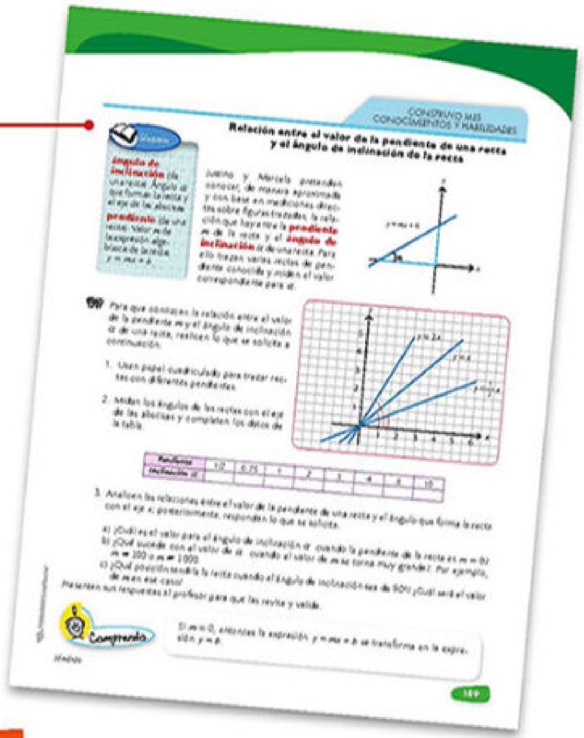
Justifico
Cápsula que fomenta el desarrollo de la argumentación para justificar los procedimientos utilizados en la resolución de un ejercicio.



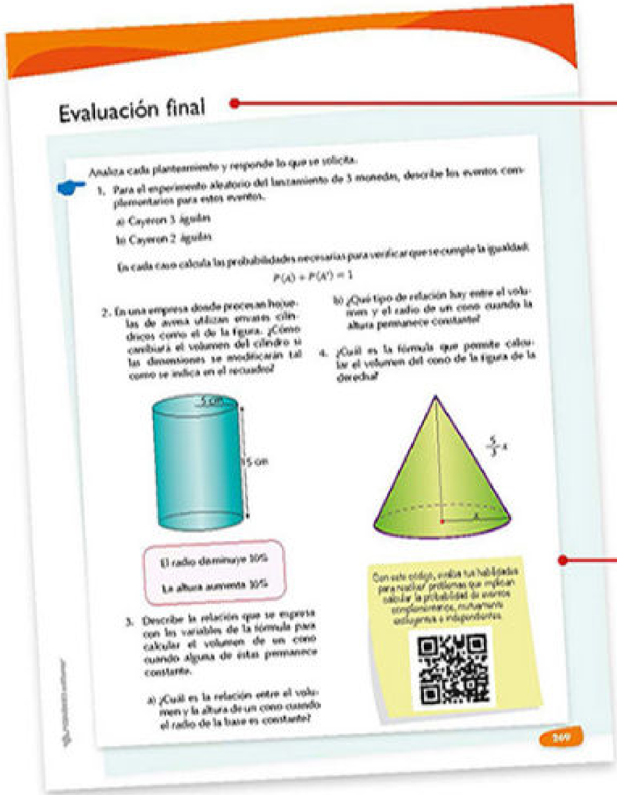
Comprendo
Incluye un enunciado concreto para resaltar algún punto importante del tema en estudio.



Habilidades digitales
Incorpora sugerencias para que realices una búsqueda a través de medios electrónicos sobre el tema en estudio; o bien, se recomienda ingresar a una página web para que realices diversos ejercicios.



6. Glosario. Aquí se definen términos para facilitar la comprensión de palabras técnicas, inusuales o de difícil comprensión.



7. Evaluación final. La encontrarás al final de cada bloque, por medio de ella podrás valorar y reflexionar en torno a lo que aprendiste.

8. Contenido digital. Utiliza lector de código QR en dispositivo móvil y descarga actividades interactivas para que evalúes de manera lúdica los aprendizajes que obtuviste en cada bloque.

Índice

DOSIFICACIÓN DE CONTENIDOS

Bloque UNO

Ejes temáticos	Tema	Contenidos matemáticos	Página	Semana	Mes
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.	22	1	Agosto Inicio Fin
Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.	28	2	Agosto Inicio Fin
		Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.	35	3 4	Septiembre Inicio Fin
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.	45	5	Septiembre Inicio Fin
		Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.	51	6	Septiembre Inicio Fin
	Nociones de probabilidad	Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.	59	7	Octubre Inicio Fin
	Análisis y representación de datos	Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.	66	8	Octubre Inicio Fin
Evaluación final			72	8	

Bloque DOS

Ejes temáticos	Tema	Contenidos matemáticos	Página	Semana	Mes
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.	76	9	Octubre Inicio Fin
Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.	84	10	Octubre Inicio Fin
		Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.	92	11	Noviembre Inicio Fin
	Medida	Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.	100	12	Noviembre Inicio Fin
		Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.	104	13 14	Noviembre Inicio Fin
Manejo de la información	Nociones de probabilidad	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).	114	15	Diciembre Inicio Fin
Evaluación final			120	15	

DOSIFICACIÓN DE CONTENIDOS

Bloque TRES

Ejes temáticos	Tema	Contenidos matemáticos	Página	Semana	Mes
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.	124	16 17	Diciembre Inicio / Fin
Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.	132	18	Enero Inicio / Fin
		Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.	138	19	Enero Inicio / Fin
		Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.	146	20	Enero Inicio / Fin
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.	152	21	Febrero Inicio / Fin
		Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.	158	22	Febrero Inicio / Fin
	Nociones de probabilidad	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).	166	23	Febrero Inicio / Fin
Evaluación final			172	23	

Bloque CUATRO

Ejes temáticos	Tema	Contenidos matemáticos	Página	Semana	Mes
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.	176	24	Febrero Inicio / Fin
Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.	182	25	Marzo Inicio / Fin
	Medida	Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.	188	26	Marzo Inicio / Fin
		Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.	194	27	Marzo Inicio / Fin
		Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.	200	28 29	Abril Inicio / Fin
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.	214	30	Abril Inicio / Fin
	Análisis y representación de datos	Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.	218	31	Mayo Inicio / Fin
Evaluación final			222	31	

DOSIFICACIÓN DE CONTENIDOS

Bloque CINCO

Ejes temáticos	Tema	Contenidos matemáticos	Página	Semana	Mes
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.	226	32 33	Mayo Inicio Fin
Forma, espacio y medida	Medida	Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.	234	34	Mayo Inicio Fin
		Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.	240	35	Junio Inicio Fin
		Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.	246	36	Junio Inicio Fin
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.	254	37	Junio Inicio Fin
	Nociones de probabilidad	Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.	262	38	Junio Inicio Fin
Evaluación final			269	38	

BLOQUE UNO

Nautilo. Corte transversal del caparazón de un nautilo, donde se logra observar cómo la estructura geométrica se va repitiendo a diferentes escalas. El nautilo pertenece al género de moluscos cefalópodos.

Ejes temáticos

- Sentido numérico y pensamiento algebraico
- Forma, espacio y medida
- Manejo de la información

Aprendizajes esperados

- Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Competencias

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas eficientemente

Patrones y ecuaciones

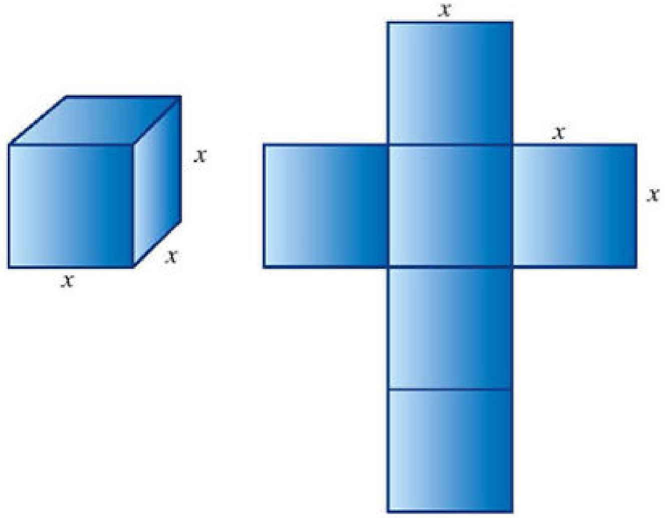
Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas

ACTIVIDADES INICIALES

Área total de un cubo

Resuelve en tu cuaderno la situación que se plantea a continuación y justifica tu respuesta.

Para conocer el total de material que se requiere para elaborar una caja con forma de cubo, Yolanda y Pablo calcularon el área total del cubo y obtuvieron el valor 311.04 cm². ¿Cuál es la longitud de cada una de sus aristas?



Analicen el problema de Yolanda y Pablo, así como las actividades que realizaron para resolverlo. Contesten las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál es la incógnita del problema?
b) Si x representa la longitud de una arista, ¿cómo se puede representar el área de una cara del cubo?
c) ¿Cuál expresión algebraica representa al área total del cubo?
d) ¿Cómo se usa el valor 311.04 cm² para representar el área total del cubo?
e) ¿Qué procedimiento se puede aplicar para resolver la ecuación obtenida?

Comprueben si su respuesta es correcta, es decir, que satisfaga las condiciones establecidas en el enunciado del problema.

Junto con el profesor, validen los procedimientos utilizados y el resultado obtenido.

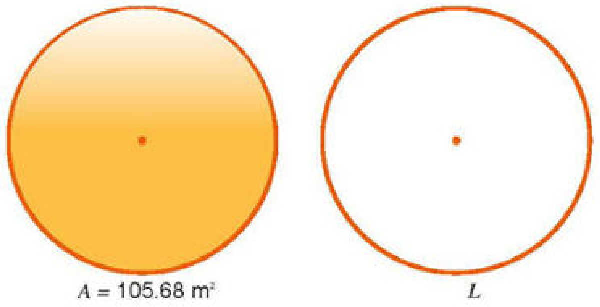
CONSTRUYO MIS CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES

Ecuaciones cuadráticas

Formulen una ecuación para cada uno de los siguientes problemas y úsenlas para obtener la solución. Comprueben las respuestas obtenidas.

1. Pienso un número y lo elevo al cuadrado; multiplico el resultado por 3 y finalmente sumo 4 para obtener el número 304. ¿De qué número se trata?

2. Calculen la longitud de la circunferencia (L) de un círculo cuya área mide 105.68 cm².



3. La suma de dos números es 10 y su producto es 21. ¿De cuáles números se trata?

4. ¿Cuánto tiempo tardará en llegar al suelo un objeto que se deja caer verticalmente desde la azotea de un edificio de 44.1 m de altura? Utilicen la siguiente fórmula.

$$h = 4.9t^2$$

5. El cuadrado de un número es igual a 10 veces dicho número más 24 unidades. ¿De qué número se trata?

Pienso

Utiliza procedimientos y cálculos mentales para resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas.

$4x^2 + 28 = 428$ $x^2 + x = 30$ $x^2 - x = 30$

Comparen sus respuestas y los procedimientos que utilizaron para obtenerlas.

Lean y analicen la siguiente información.

Las ecuaciones como $6x^2 = 311.04$ se llaman ecuaciones de segundo grado o **ecuaciones cuadráticas** porque el mayor exponente de la incógnita es 2.

Glosario

ecuaciones cuadráticas. Son todas las ecuaciones que se pueden escribir en la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

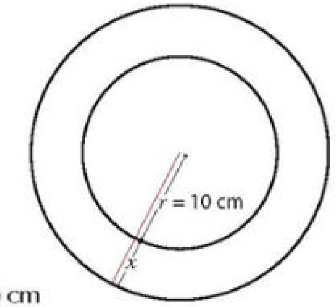
donde el coeficiente a es distinto de cero.

¿Cómo se calculan las soluciones o raíces de las ecuaciones cuadráticas utilizando operaciones inversas?

Pienso

Elvira y Francisco trazaron un círculo cuyo radio (r) mide 10 cm; ahora pretenden determinar el incremento que deben aplicar al radio para que el nuevo círculo tenga el doble de área.

Área del círculo menor = A
Área del círculo mayor = $2A$



Radio del círculo = 10 cm
Radio del círculo mayor = $(10 + x)$ cm

Justifiquen cada uno de los pasos para resolver el problema planteado por Francisco y Elvira.

1. $A = \pi r^2$, $A = 100\pi$
2. $A' = 2\pi r^2$, $A' = 200\pi$
3. $A' = \pi(10 + x)^2$
4. $\pi(10 + x)^2 = 200\pi$
5. $(10 + x)^2 = 200$
6. $10 + x = \sqrt{200}$
7. $x = \sqrt{200} - 10$
8. $x = 4.1421$

$$\boxed{x = 4.1421 \text{ cm}}$$

Verifica que el radio $r = 10$ cm se tiene que incrementar en 4.14 cm aproximadamente para duplicar el área del círculo original.

Aplico

Utiliza **operaciones inversas** para calcular la raíz de cada ecuación cuadrática.

1. $x^2 = 121$
2. $x^2 - 56 = 140$
3. $7x^2 + 13 = 580$
4. $x^2 + 25 = 250$
5. $4x^2 = 100$
6. $-2x^2 + 42 = -200$
7. $\frac{1}{3}x^2 + 15 = 27$
8. $-\frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{5} = -1$

Glosario

operaciones inversas. Son parejas de operaciones en las que una operación revierte o deshace el efecto de la otra. Por ejemplo, la suma y la resta, la multiplicación y la división o elevar al cuadrado y obtener la raíz cuadrada.

¿Cuál es la solución de una ecuación cuadrática de la forma $x^2 = p$?

Yadira y Eusebio saben que los microcircuitos se utilizan para lograr el funcionamiento de las computadoras. Si se quiere fabricar un microcircuito con forma de cuadrado para que cubra un área de 361 mm², ¿cuál será la longitud de cada lado de éste?

Planteen y resuelvan una ecuación cuadrática para solucionar el problema de Eusebio y Yadira.

Las ecuaciones de la forma $x^2 = p$ son un tipo de ecuaciones cuadráticas; reciben este nombre debido a la presencia de x^2, llamado término cuadrático o de segundo grado.

Hasta ahora sabemos calcular una raíz para las ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 = p$. Por ejemplo, para $x^2 = 196$, sabemos que al calcular $x = \sqrt{196}$, obtenemos $x = 14$.

¿Existe otro número cuyo cuadrado sea 196?, ¿cuál es ese número?

Al analizar y responder correctamente la pregunta anterior, habrán descubierto que las ecuaciones de la forma $x^2 = p$ pueden tener dos raíces o soluciones.

Calcula las raíces de las ecuaciones cuadráticas.

a) $x^2 = 100$ b) $x^2 = 72$ c) $x^2 = 121$ d) $x^2 = 0$

Justifico

Analiza y justifica cada una de las siguientes afirmaciones.

1. Si p es un número positivo y $x^2 = p$, entonces las raíces o soluciones de la ecuación cuadrática son…

$$x_1 = \sqrt{p}, \qquad x_2 = -\sqrt{p}$$

2. Si $p = 0$, por tanto, las raíces de la ecuación $x^2 = p$ son iguales, es decir:

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0$$

3. Si p es un número negativo, implica que las raíces de la ecuación $x^2 = p$ no son reales, puesto que la raíz cuadrada de un número negativo no se puede calcular con los números que conocemos hasta ahora.

¿Cómo se resuelven las ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + c = 0$?

Lucila y Adrián te proponen que analices el siguiente planteamiento y completes cada paso para llegar a la respuesta correcta.

Se debe hallar un número x sabiendo que el doble de su cuadrado menos 18 es igual a cero.

1. Si el número es x…
   - El cuadrado de éste es…
   - El doble de su cuadrado es…
   - El doble de su cuadrado menos 18 es…
   - La ecuación cuadrática es…
2. ¿Cómo se puede resolver esa ecuación utilizando operaciones inversas?
   - El número buscado es…
   - También puede ser…
3. ¿Cómo se pueden comprobar los valores obtenidos?

Generalizo

1. Resuelve las ecuaciones de la forma $ax^2 + c = 0$

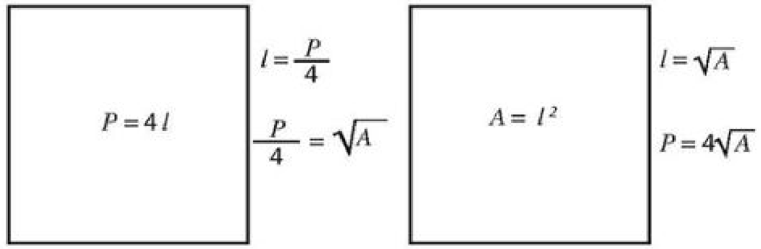
   a) $-3x^2 + 108 = 0$ *b*) $-5x^2 - 20 = 0$ *c*) $-3x^2 + 8 = 2(x^2 + 4)$

2. Completa lo que haga falta en cada caso.
   Cuando se pretende resolver una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + c = 0$, se pueden presentar los siguientes casos:
   - Si $-\frac{c}{a} = 0$, entonces…
   - Si $-\frac{c}{a} > 0$, entonces…
   - Si $-\frac{c}{a} < 0$, entonces…

Comunico

Redacta un escrito para justificar la siguiente afirmación y entrégaselo a tu profesor para que lo valide.

Si conozco el valor A del área de un cuadrado, entonces el perímetro se puede calcular con la fórmula $P = 4\sqrt{A}$.



Realiza lo que se indica en cada caso y justifica cada una de tus respuestas.

1. Calcula las raíces o soluciones para cada ecuación cuadrática.

   a) $x^2 = 121$
   b) $x^2 = -100$
   c) $\frac{4}{5}x^2 = 200$
   d) $-12x^2 = -1200$
   e) $8x^2 - 10 = 40$
   f) $4x^2 + 12 = 3x^2 + 12$

2. La longitud (l) de la cuerda de un péndulo y el tiempo (t) que tarda en realizar una oscilación completa se relacionan mediante la fórmula $l = \frac{g}{2\pi}t^2$.

¿Cuánto tiempo tarda un péndulo de 60 cm de longitud en dar una oscilación completa, en un lugar en el que $g = 9.81$ m/s²?

3. Redacta un escrito para que comuniques a tus compañeros que las raíces de una ecuación de la forma $ax^2 + c = 0$ dependen de los valores que puede tomar el cociente $-\frac{c}{a}$.

   a) ¿Qué sucede si $-\frac{c}{a} = 0$?
   b) ¿Cuáles son las raíces cuando $-\frac{c}{a} < 0$?
   c) ¿Y para $-\frac{c}{a} > 0$?

4. Justifica que las raíces de la ecuación cuadrática $(x-8)^2 = 121$ sean $x_1 = 19$ y $x_2 = -3$.

¿Cómo calculaste estas raíces?

¿Cómo se puede comprobar que efectivamente son las raíces de la ecuación cuadrática?

Habilidades digitales

Para que conozcas diferentes formas de ecuaciones cuadráticas, realiza una búsqueda en internet; puedes comenzar ingresando a la siguiente dirección electrónica:
http://www.ematematicas.net/ecsegundogrado.php?tipo=completa
(Consulta: 11 de agosto de 2014).
Haz un escrito con los resultados de tu investigación y preséntalo al profesor.

Bloque UNO

Figuras y cuerpos

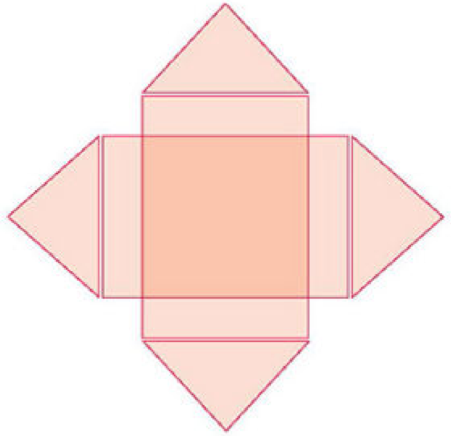
Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades

ACTIVIDADES INICIALES

Figuras congruentes y figuras semejantes

Justino y Araceli trazan **figuras congruentes** y **figuras semejantes**.

La siguiente figura es un ejemplo de lo que han trazado.



Glosario

figuras congruentes. Cuando al colocar una figura sobre otra, se observa que coinciden en todos sus puntos.

figuras semejantes. Son figuras que tienen la misma forma pero pueden tener diferentes dimensiones, las cuales son proporcionales.

Realiza lo que se indica a continuación.

a) Traza en tu cuaderno una figura congruente a la que se muestra en la ilustración.
b) Traza una figura semejante a la anterior, de tal manera que la longitud de los lados del cuadrado sea de 8 cm cada uno.
c) Describe los procedimientos aplicados para las actividades anteriores.

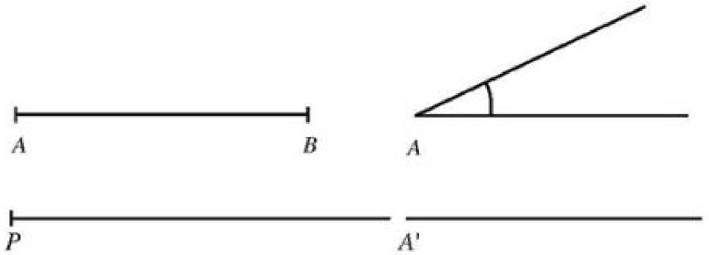
Analicen las actividades realizadas para que:

a) Escriban la definición de figuras congruentes
b) Construyan el concepto de figuras semejantes

Redacten un escrito titulado "Propiedades de los triángulos, cuadrados y rectángulos" en el que se analicen y describan las propiedades de las figuras geométricas utilizadas en los trazos solicitados. Preséntenlo a su profesor para su revisión y validación.

¿Cómo se trazan figuras congruentes?

Analicen las ilustraciones y describan el procedimiento que se puede seguir para completar la segunda figura en cada caso.



a) ¿Cómo se puede trazar un segmento $\overline{PQ}$ que sea congruente con el segmento $\overline{AB}$?

b) ¿Cuál procedimiento se puede seguir para trazar un ángulo A' que sea congruente con el ángulo A?

¿Cómo se pueden aplicar los conceptos de **razón** y **proporción** para obtener segmentos proporcionales?

Amelia y Saúl hicieron una investigación para conocer los conceptos de razón de dos segmentos y de segmentos proporcionales. Ahora analiza y completa sus resultados.

Glosario

razón. Es la comparación de dos cantidades a y b, mediante su cociente $\frac{a}{b}$.

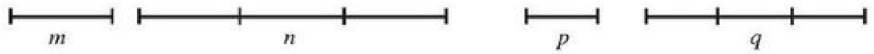
proporción. Es la igualdad de dos razones: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Razón de dos segmentos

La razón de los segmentos $\overline{CD}$ y $\overline{AB}$ es el cociente de sus longitudes, es decir: ____________

Segmentos proporcionales

Dos segmentos son proporcionales a otros dos si las razones de sus medidas son iguales.

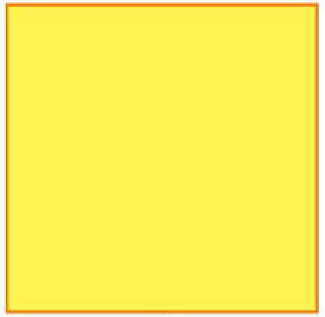


Si los segmentos de longitudes m y n corresponden a los segmentos de longitudes p y q, y se cumple la igualdad $\frac{m}{n} =$ ____________, entonces los cuatro segmentos son proporcionales.

Soliciten al profesor que organice una actividad grupal para que revisen y validen sus respuestas.

Con la finalidad de que conozcan algunas propiedades de los cuadrados, realicen lo que se solicita a continuación.

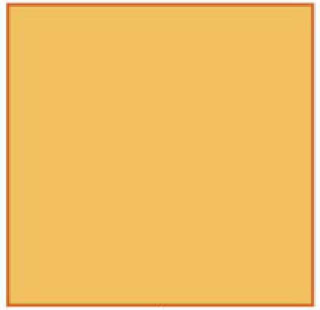
a) Cada uno de ustedes deberá trazar un cuadrado congruente con el de la figura y describir el procedimiento empleado para llevarlo a cabo.



b) Recorten los cuadrados que trazaron y verifiquen que sean congruentes con la figura anterior.
c) Comparen sus cuadrados con los de otras parejas de compañeros y obtengan una conclusión.
d) ¿Cuáles son las propiedades de los cuadrados que sirven para trazar cuadrados congruentes?

Para que puedan determinar diferentes procedimientos para trazar cuadrados semejantes y conocer algunas de sus propiedades, hagan lo siguiente:

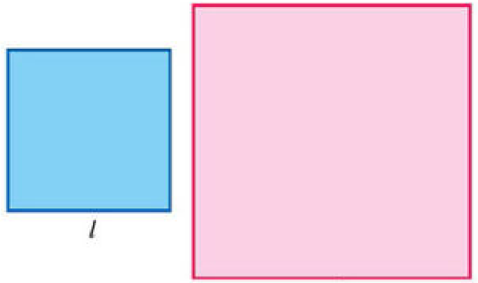
a) Cada uno de ustedes deberá trazar un cuadrado semejante al cuadrado de la derecha, además, determinará la razón de semejanza que se haya utilizado.
b) Después de comparar sus procedimientos, elaboren un escrito en el que presenten sus conclusiones en torno al trazo de cuadrados semejantes y expónganlo a su profesor.



Generalizo

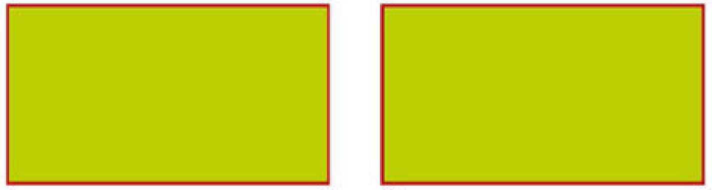
Dos cuadrados siempre son semejantes en virtud de que todos sus ángulos miden 90° y todos sus lados cumplen con la misma razón.

La razón de semejanza es $k = \frac{L}{l}$.



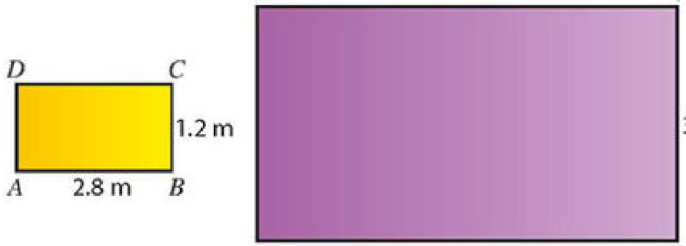
Realicen lo que se pide en cada caso.

1. Tracen en sus cuadernos los dos rectángulos iguales y completen lo que haga falta en cada afirmación.



a) Los lados correspondientes u homólogos son iguales: $\overline{AD} = \overline{PS}$, ...
b) Los ángulos homólogos son iguales: $\measuredangle A = \measuredangle P$, ...
c) Las diagonales homólogas son iguales: $\overline{AC} = \overline{PR}$, ...
d) Los perímetros de los rectángulos son iguales: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} =$
e) Las áreas de los rectángulos son iguales: $\overline{AB} \times \overline{BC} =$

2. El rectángulo $\square ABCD$ se transformó mediante una **homología** en el rectángulo $\square A'B'C'D'$.



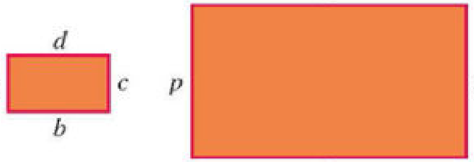
a) ¿Cuál es la longitud del lado $\overline{A'B'}$?
b) ¿Cuál es el valor de la razón de proporcionalidad o razón de semejanza?
c) Verifiquen que los perímetros P y P' de los dos rectángulos también cumplen con la razón de proporcionalidad o razón de semejanza.

Glosario

homología. Es una transformación o relación de semejanza entre figuras geométricas. Los elementos de las figuras que se corresponden se denominan elementos homólogos.

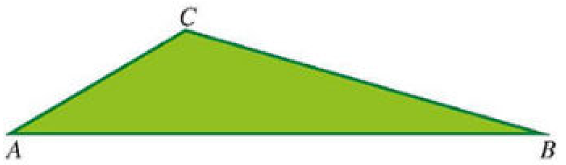
Pienso

Para poder afirmar que dos rectángulos son semejantes, sólo es necesario verificar que se cumpla la proporcionalidad entre las longitudes de sus lados diferentes: $\frac{p}{a} = \frac{q}{b}$.



$k = \frac{p}{a}$ $k = \frac{q}{b}$

Para que conozcan diferentes procedimientos para trazar un triángulo congruente con el $\triangle ABC$, lean y apliquen los procedimientos que se presentan a continuación. En cada caso, verifiquen que se haya obtenido un triángulo congruente con el $\triangle ABC$.



Procedimiento 1

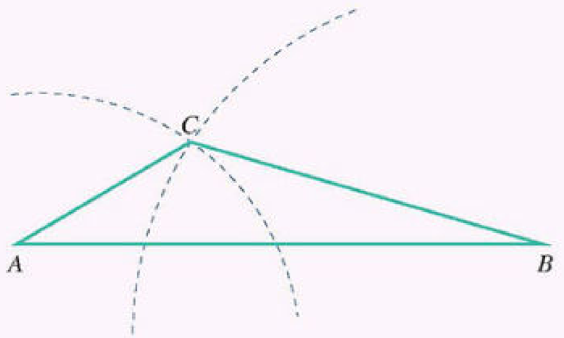
1. Trazo uno de los lados, por ejemplo, $\overline{AB}$.
2. En los puntos extremos A y B, trazo ángulos iguales a los ángulos $\angle A$ y $\angle B$ respectivamente.
3. La intersección de los lados de los ángulos trazados será el vértice C.
4. Verifico que se cumplan las igualdades entre los lados correspondientes y entre los ángulos correspondientes.

Procedimiento 2

1. Trazo uno de los ángulos, por ejemplo, $\angle A$.
2. En cada uno de los lados del ángulo trazado, se determinan los vértices B y C del triángulo, de tal manera que los lados correspondientes resulten iguales.
3. Se traza el lado $\overline{BC}$.
4. Verifico que se cumplan las igualdades entre lados y ángulos correspondientes.

Procedimiento 3

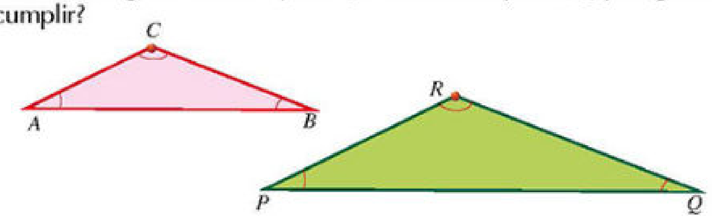
1. Trazo uno de los lados del triángulo, por ejemplo $\overline{AB}$.
2. Con un compás, tomo las longitudes de los otros lados, uno cada vez, y trazo los arcos de circunferencia que se intersequen en un punto que será el tercer vértice del triángulo.
3. Trazo los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.
4. Verificó que se cumplan las igualdades entre los lados y ángulos correspondientes.



Comunico

Redacta un texto sobre el planteamiento que aparece a continuación y compártelo con tus compañeros.

Para que dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle PQR$ sean semejantes, ¿qué igualdades se deben cumplir?



$\angle A = \angle P$ $\quad$ $\angle B = \angle Q$ $\quad$ $\angle C = \angle R$

$\overline{PQ} = k \times \overline{AB}$ $\quad$ $\overline{QR} = k \times \overline{BC}$ $\quad$ $\overline{RP} = k \times \overline{CA}$

Siendo k la razón de semejanza.

¿Cómo se puede trazar un triángulo semejante a uno ya conocido?

Ramiro y Elisa pretenden trazar un triángulo $\triangle PQR$ semejante al triángulo $\triangle ABC$ de la siguiente figura, de tal manera que el lado $\overline{PQ}$ sea el lado correspondiente u homólogo del lado $\overline{AB}$.

Usen los siguientes procedimientos para resolver el problema planteado por Elisa y Ramiro; en cada caso, verifiquen que se obtiene el triángulo $\triangle PQR$ semejante al $\triangle ABC$.

1. Tracen $\overline{PQ}$, copien los ángulos $\angle A$ y $\angle B$ en P y Q, respectivamente. Determinen el vértice R y verifiquen que se cumplan las igualdades necesarias para que $\triangle ABC$ y $\triangle PQR$ sean semejantes.

2. Calculen el valor de la razón de semejanza k, determinen los lados $\overline{QR}$ y $\overline{RP}$, y apliquen el procedimiento 3 de la página anterior para trazar triángulos congruentes.

Verifiquen que se cumplen las igualdades necesarias para la semejanza de triángulos.

3. Tracen $\overline{PQ}$, calculen k, copien $\angle A$, calculen $\overline{AC}$ y localicen R. Tracen el triángulo $\triangle PQR$ y verifiquen que se cumplan las igualdades necesarias para la semejanza de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle PQR$.

Actividad extraclase

Para que incrementes tus conocimientos sobre congruencia de figuras geométricas, estudia el tema "Geometría práctica y geometría deductiva" el cual puedes consultar en *Crónicas geométricas* de Concepción Ruiz y Sergio de Régules.

EVALUACIÓN FORMATIVA

Analiza los siguientes planteamientos y realiza lo que se solicita en cada caso.

1. Se pretende ampliar una fotografía de tal manera que el lado correspondiente u homólogo a $\overline{AB}$ mida 52.5 cm. ¿Cuál será la longitud del lado $\overline{B'C'}$?

$\boxed{\overline{B'C'} = \quad}$

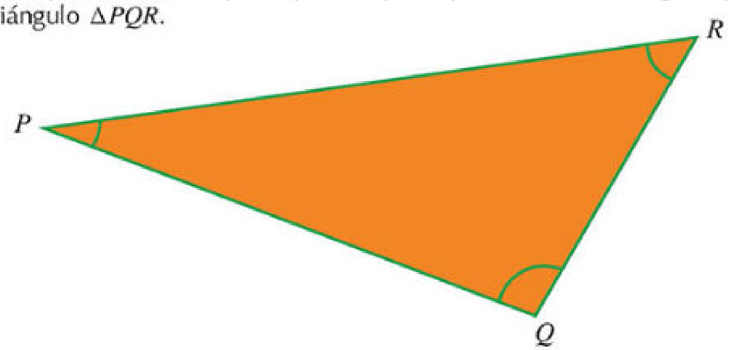
2. Determina cuáles afirmaciones son falsas y cuáles son verdaderas.

   a) Todos los triángulos equiláteros son congruentes.
   b) Todos los triángulos equiláteros son semejantes.
   c) Todos los triángulos isósceles son semejantes.
   d) Todos los triángulos escalenos son semejantes.

Justifica cada una de tus respuestas.

3. Divide el segmento $\overline{PQ}$ en dos segmentos, $\overline{PM}$ y $\overline{MQ}$, de tal suerte que se cumpla la igualdad $\frac{\overline{PM}}{\overline{MQ}} = \frac{3}{7}$.

4. Describe un procedimiento que se pueda aplicar para trazar un triángulo que resulte congruente con el triángulo ΔPQR.



Habilidades digitales

Con el propósito de que conozcas otras propiedades de las figuras geométricas, busca en internet información del tema "Propiedades de figuras geométricas". Puedes iniciar tu búsqueda ingresando a la siguiente dirección electrónica:
http://www.escueladigital.com.uy/geometria/4_figplanas.htm
(Consulta: 17 de enero de 2015).

Figuras y cuerpos

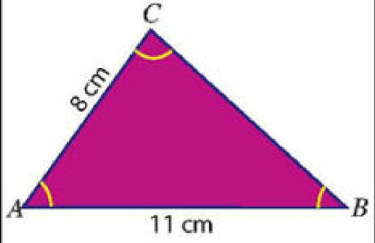
Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada

ACTIVIDADES INICIALES

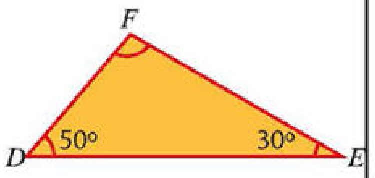
Construcción de triángulos

Analiza la información que se proporciona en cada tarjeta y determina la cantidad de triángulos que se puede trazar en cada caso. Trázalos en tu cuaderno.

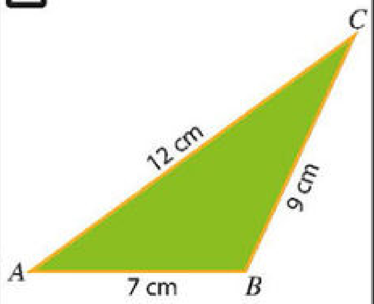
1 Dos lados conocidos



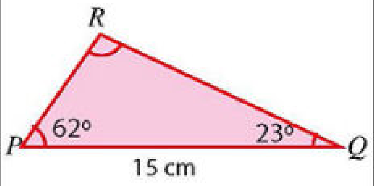
2 Dos ángulos conocidos



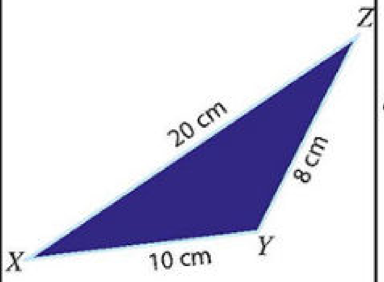
3 Tres lados conocidos



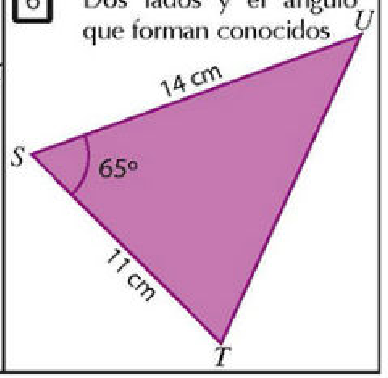
4 Dos ángulos y el lado común conocidos



5 Tres lados conocidos



6 Dos lados y el ángulo que forman conocidos



Observen los trazos efectuados y determinen en cuáles casos se consigue:

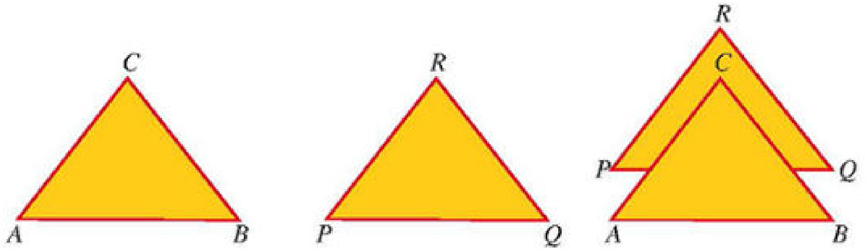
a) Un solo triángulo
b) Más de un triángulo
c) Ningún triángulo

Presenten ante el grupo los casos en los que determinaron que sólo se consigue un triángulo. Justifiquen sus respuestas y soliciten al profesor que las valide.

¿Cuáles son las condiciones que cumplen dos triángulos iguales o congruentes?

Estela y Román recuerdan que un triángulo es un polígono que tiene nueve elementos fundamentales: tres lados, tres ángulos y tres vértices.

¿Cómo son dos triángulos cuando es posible sobreponerlos de tal manera que todos sus elementos coincidan?



Completa las condiciones que se cumplen cuando los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle PQR$ son iguales o congruentes.

Al sobreponer el $\triangle ABC$ sobre el $\triangle PQR$:

a) El vértice P coincide con el vértice A, el vértice Q...

b) Los ángulos cumplen las siguientes igualdades o congruencias:

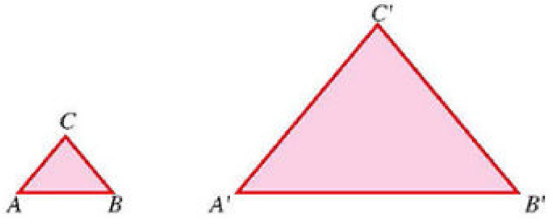
$\measuredangle A \cong \measuredangle P$ $\quad$ $\measuredangle B \cong$ $\quad$ $\measuredangle C \cong$

($\cong$ significa congruente o de la misma medida)

c) Los lados cumplen con las congruencias:

$\overline{AB} \cong \overline{PQ}$ $\quad$ $\overline{BC} \cong$ $\quad$ $\overline{CA} \cong$

Román y Estela observaron el $\triangle ABC$ con una lente que triplica las longitudes, por tal motivo lo vieron como el $\triangle A'B'C'$.

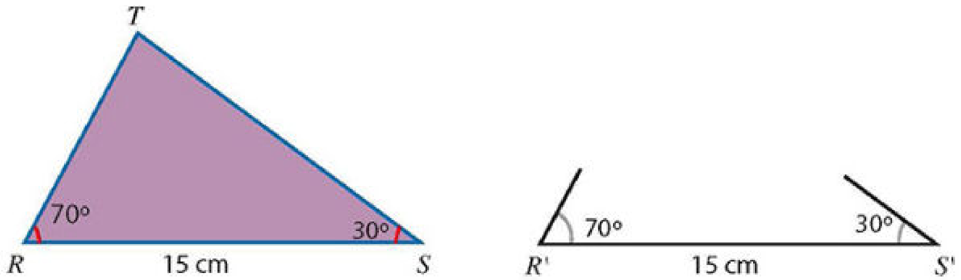


Analicen las figuras anteriores y completen lo que falta en cada caso.

1. $\measuredangle A' =$ $\quad$ $\measuredangle B' =$ $\quad$ $\measuredangle C' =$
2. $\overline{A'B'} =$ __ $\overline{AB}$ $\quad$ $\overline{B'C'} =$ __ $\overline{BC}$ $\quad$ $\overline{C'A'} =$ __ $\overline{CA}$
3. Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son semejantes, es decir, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.
4. Dos triángulos son semejantes si...

Presenten sus respuestas ante el grupo y soliciten la validación del profesor.

Criterio *ALA* para la congruencia de triángulos



Ramiro y Brenda desean trazar un triángulo congruente con el triángulo $\triangle RST$, para lo cual han trazado un segmento $\overline{R'S'}$ congruente con el segmento $\overline{RS}$. En los extremos de $\overline{R'S'}$ trazaron los ángulos $\measuredangle R'$ y $\measuredangle S'$, los cuales son congruentes con los ángulos $\measuredangle R$ y $\measuredangle S$, respectivamente, del triángulo original $\triangle RST$.

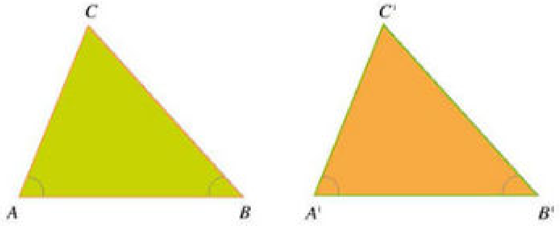
a) ¿Se puede afirmar que Ramiro y Brenda han logrado su propósito?, ¿por qué?

b) ¿Cómo se obtiene el vértice T' del nuevo triángulo $\triangle R'S'T'$?

Generalizo

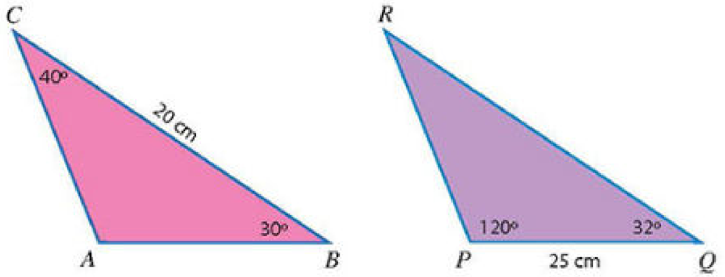
Criterio *ALA* para la congruencia de triángulos

Dos triángulos son congruentes si uno de sus lados y los ángulos adyacentes a éste son congruentes.



Si $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\measuredangle A = \measuredangle A'$ y $\measuredangle B = \measuredangle B'$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Apliquen el criterio para la congruencia de triángulos y tracen triángulos congruentes a partir de los siguientes.



Describan sus procedimientos y compárenlos con los de otros compañeros.

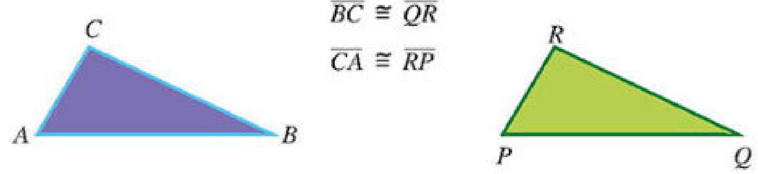
Criterio LLL para la congruencia de triángulos

¿Qué se puede afirmar de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle PQR$?, para los cuales se cumplen las siguientes igualdades.

$\overline{AB} \cong \overline{PQ}$

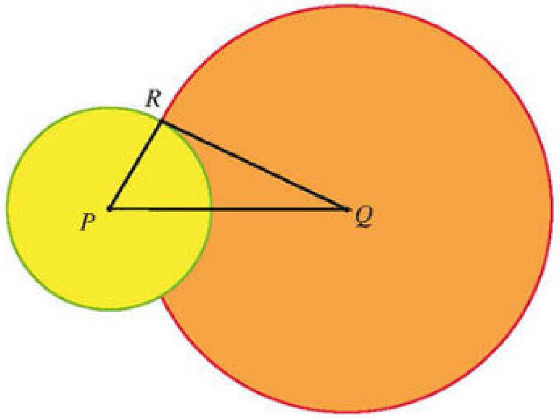
$\overline{BC} \cong \overline{QR}$

$\overline{CA} \cong \overline{RP}$



Tratemos de colocar el triángulo $\triangle ABC$ sobre el $\triangle PQR$.

1. Se coloca el lado $\overline{AB}$ sobre el lado $\overline{PQ}$.
2. Con el compás, se toma la medida del segmento $\overline{AC}$ y, tomando al punto P como centro, se traza una circunferencia de radio $\overline{AC}$.
3. Se toma la medida $\overline{BC}$ con el compás. Apoyándose en el punto Q como centro, se traza una circunferencia de radio $\overline{BC}$.
4. El punto de intersección de las dos circunferencias es el vértice C, el cual debe quedar sobre R. En este caso, los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle PQR$ coinciden en todos sus puntos.



Analicen y repitan el proceso anterior para que lleguen a una conclusión.

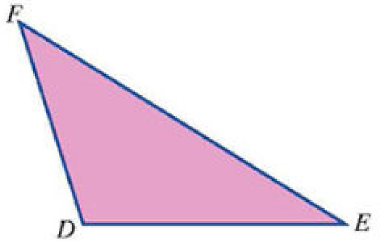
Comunico

Elabora un cartel en el que expliques el criterio LLL para la congruencia de triángulos:

Si los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle PQR$ tienen sus tres lados respectivamente congruentes, entonces los triángulos son congruentes.

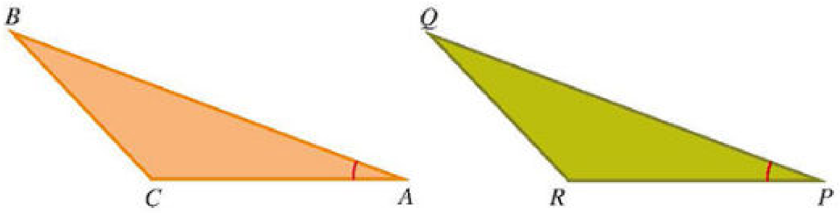
Utiliza el criterio LLL de congruencia de triángulos para que en tu cuaderno traces un triángulo congruente con el $\triangle DEF$.

Justifica, paso por paso, el procedimiento que seguiste.



Criterio LAL para la congruencia de triángulos

¿Qué se puede afirmar acerca de dos triángulos que coinciden en dos lados y en el ángulo que forman?



$\overline{AB} \cong \overline{PQ}$

$\measuredangle A \cong \measuredangle P$

$\overline{AC} \cong \overline{PR}$

(LAL significa que hay igualdad de dos lados y del ángulo que se forma con los mismos)

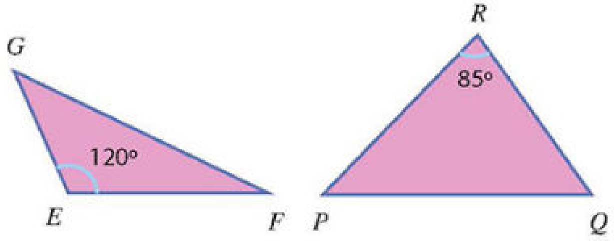
El triángulo $\triangle ABC$ se puede sobreponer al $\triangle PQR$ tomando en cuenta los siguientes aspectos:

1. Si se coloca $\overline{AC}$ sobre $\overline{PR}$ ¿por qué se puede afirmar que el vértice A quedará sobre P, y que el vértice C sobre R?
2. ¿Cómo se justifica que $\overline{AB}$ quedará sobre $\overline{PQ}$?
3. ¿En qué posición quedará el vértice B? ¿Por qué razón?
4. ¿De qué manera se explica que $\overline{BC}$ quedará exactamente sobre $\overline{QR}$?
5. ¿Cuál es la conclusión que se puede obtener?

Comparen sus conclusiones y establezcan el criterio LAL para la congruencia de triángulos.

Discutan sobre los criterios LAL que hayan elaborado y en grupo lleguen a una conclusión. Soliciten la validación del profesor.

Aplica el criterio LAL para la congruencia de triángulos y traza triángulos congruentes a los siguientes.



Describan el procedimiento seguido y compárenlo con los procedimientos utilizados por sus compañeros.

Aplico

Mediante el criterio LAL para la congruencia de triángulos, elabora un diseño artístico en el que se tracen varios triángulos congruentes.

El puente de los asnos

Con este nombre se conocía en la Edad Media a la siguiente propiedad de los triángulos isósceles:

El puente de los asnos

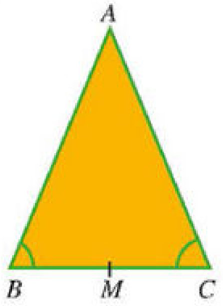
Para el triángulo $\triangle ABC$, en el que $\overline{AB} = \overline{AC}$, se debe demostrar que $\measuredangle B = \measuredangle C$.

Es decir, que los ángulos formados con el lado diferente de un triángulo isósceles son congruentes, es otra manera de describir la propiedad anterior.

Se sabe, además, que en las universidades medievales ésta era la propiedad que se debía demostrar para aprobar el curso de matemáticas.

Para que desarrolles tu razonamiento matemático, investiga las siguientes justificaciones de la congruencia de los ángulos en la base de los **triángulos isósceles**.

Primera justificación



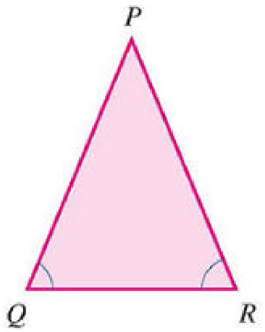
1. Traza un triángulo isósceles $\triangle ABC$ en el que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.
2. Traza el segmento de recta que une el vértice A con el punto medio M del lado $\overline{BC}$.
3. ¿Cuál criterio de congruencia se puede utilizar para justificar que se han formado dos triángulos iguales?
4. ¿Por qué se puede concluir que $\measuredangle B \cong \measuredangle C$?

Glosario

triángulos isósceles. Son los polígonos de tres lados que tienen dos lados iguales y uno diferente.

Segunda justificación

1. Traza un triángulo isósceles $\triangle PQR$ en el que $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$.
2. Traza la bisectriz del $\measuredangle P$.
3. ¿En este caso, cuál es el criterio para determinar la congruencia de los triángulos?
4. ¿Por qué se puede concluir que $\measuredangle Q \cong \measuredangle R$?



Comparen sus justificaciones y presenten una conclusión ante el grupo. Soliciten al profesor la validación de sus respuestas.

Justificación de construcciones geométricas mediante la congruencia de triángulos

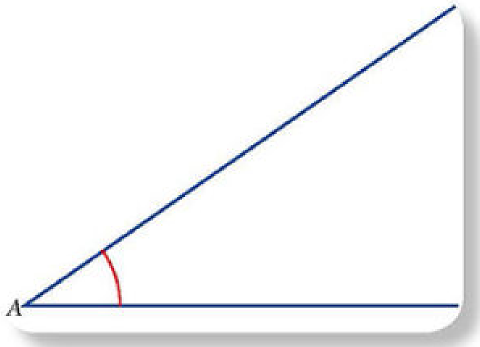
Berenice y Antonio pretenden justificar la construcción de la **bisectriz de un ángulo** $\measuredangle A$ utilizando los criterios de congruencia de triángulos.

Glosario

bisectriz de un ángulo. Es la recta que divide al ángulo en dos ángulos iguales.

mediatriz de un segmento. Es la recta perpendicular al segmento que pasa por su punto medio.

¿Cómo se construye la bisectriz de un ángulo $\measuredangle A$?



Tracen en sus cuadernos la siguiente figura y describan el procedimiento que se puede usar para obtener la bisectriz de un ángulo $\measuredangle A$, utilizando una regla y un compás.

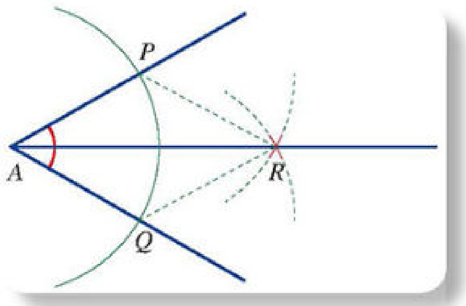
¿Cómo se determinan los puntos P y Q en cada uno de los lados del ángulo $\measuredangle A$?

¿De qué manera se localiza el punto R que permite trazar la recta por A y R?

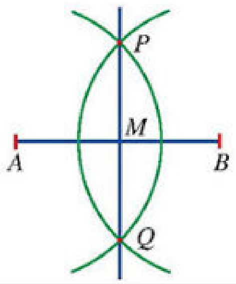
¿Cómo se puede justificar que $\overline{AR}$ sea la bisectriz del ángulo $\measuredangle A$?

¿Cuál criterio de congruencia se puede aplicar para justificar que los triángulos $\triangle APR$ y $\triangle AQR$ son congruentes?

¿Por qué se puede afirmar que los ángulos $\measuredangle PAR$ y $\measuredangle QAR$ son congruentes?



Puesto que el ángulo $\measuredangle A$ se dividió en dos ángulos iguales, es posible concluir que $\overline{AR}$ es la bisectriz del ángulo $\measuredangle A$.



Antonio y Berenice también desean justificar el procedimiento que se usa para trazar la **mediatriz de un segmento** $\overline{AB}$.

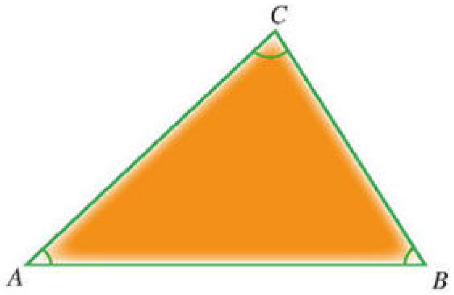
Traza en tu cuaderno la figura de la izquierda, comienza con el segmento $\overline{AB}$ y señala por qué la recta que pasa por P y Q es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

Presenta tu justificación al profesor para que la revise y valide.

Si selecciono un punto P en la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, entonces puedo trazar un triángulo isósceles.

Criterio AAA para la semejanza de triángulos

Con la finalidad de que establezcas un criterio para determinar la semejanza de triángulos, traza la figura que se indica en el siguiente procedimiento.



1. Traza un segmento $\overline{A'B'}$ de cualquier longitud.
2. En los extremos del segmento $\overline{A'B'}$, traza ángulos $\measuredangle A'$ y $\measuredangle B'$ congruentes respectivamente a los ángulos $\measuredangle A$ y $\measuredangle B$.
3. Prolonga los lados de los ángulos trazados para determinar el vértice C'. Verifica que los ángulos $\measuredangle C$ y $\measuredangle C'$ sean congruentes.
4. Mide los lados de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ calcula el valor de las razones, compáralas y escribe una conclusión.

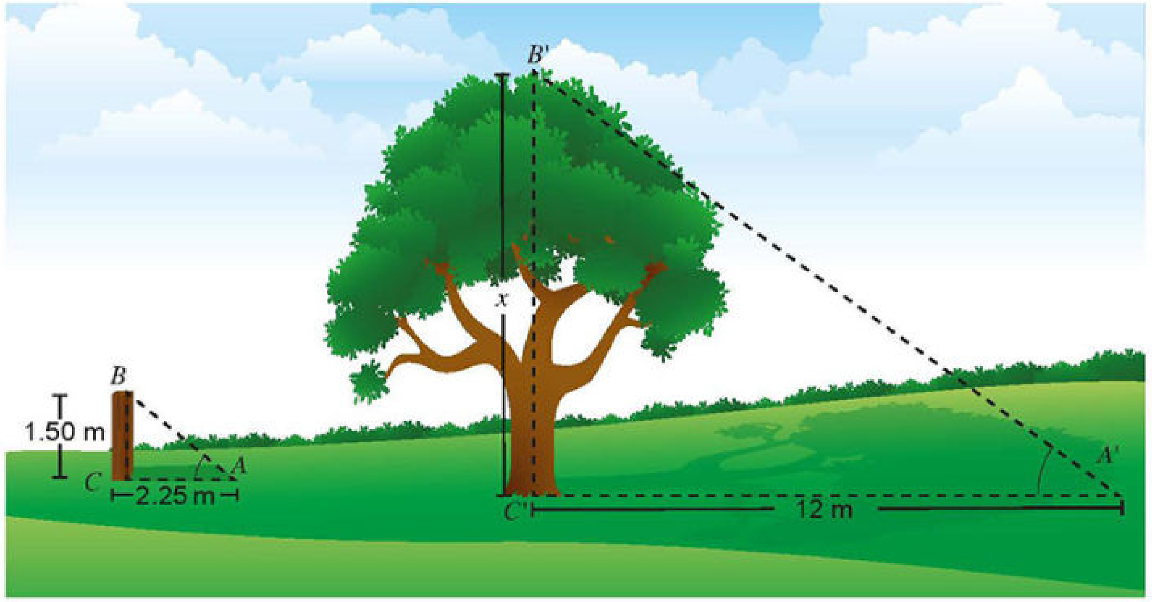
$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \qquad \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} \qquad \frac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}}$$

5. ¿Por qué razones se puede concluir que los triángulos son semejantes?

$$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$$

Realicen las siguientes actividades.

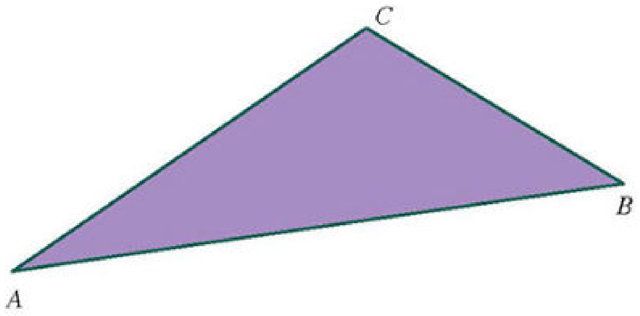
1. Repitan el procedimiento anterior, comenzado con otro segmento $\overline{A'B'}$ de diferente tamaño.
2. Describan el criterio AAA para determinar la semejanza de triángulos.
3. Soliciten que el profesor organice una puesta en común para establecer el criterio anterior.
4. Calculen la altura de un árbol, sabiendo que proyecta una sombra de 12 m, mientras que una estaca de 1.50 m de altura, a la misma hora del día proyecta una sombra de 2.25 m.



Criterio de lados proporcionales para determinar la semejanza de triángulos

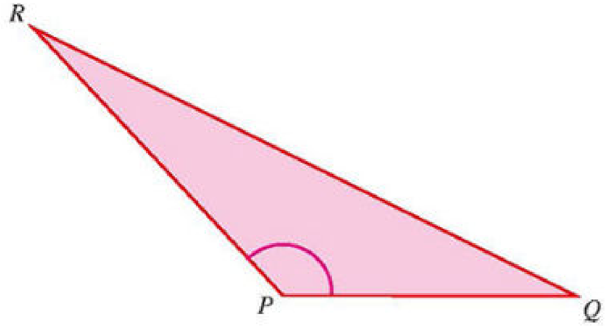
Para establecer otro criterio que permita determinar la semejanza entre triángulos, sigan el procedimiento señalado a continuación.

1. Midan los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ del $\triangle ABC$.
2. Determinen un valor k para trazar segmentos de longitudes $k(\overline{AB})$, $k(\overline{BC})$ y $k(\overline{CA})$; por ejemplo $k = 3.5$
3. Con los nuevos segmentos; tracen un triángulo $\triangle A'B'C'$, de tal forma que $\overline{A'B'} = k(\overline{AB})$, $\overline{B'C'} = k(\overline{BC})$ y $\overline{C'A'} = k(\overline{CA})$.



4. ¿Qué se necesita comprobar para concluir que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son semejantes?
5. Describan el criterio de lados proporcionales para establecer la semejanza de triángulos.

¿Cómo se puede establecer un criterio LAL para determinar la semejanza de dos triángulos?



1. Se traza un ángulo $\measuredangle P'$ congruente con el ángulo $\measuredangle P$.
2. Se selecciona un valor para k; por ejemplo $k = 2.5$. Se determinan $\overline{P'R'}$ y $\overline{P'Q'}$ de tal manera que:

$$\frac{\overline{P'R'}}{\overline{PR}} = k \qquad \frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = k$$

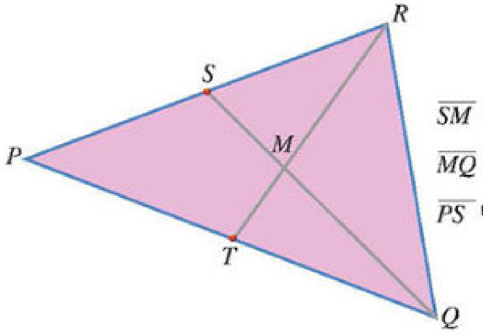
3. Se completa el lado $\overline{Q'R'}$. ¿Cómo se podría verificar que se obtuvo un triángulo semejante al triángulo $\triangle PQR$?

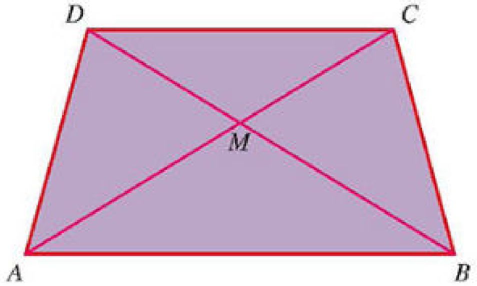
$$\triangle P'Q'R' \sim \triangle PQR$$

Describan el criterio LAL para la semejanza de triángulos y compárenlo con los elaborados por otros compañeros.

Contesta lo que se pide en cada caso y justifica tus respuestas.

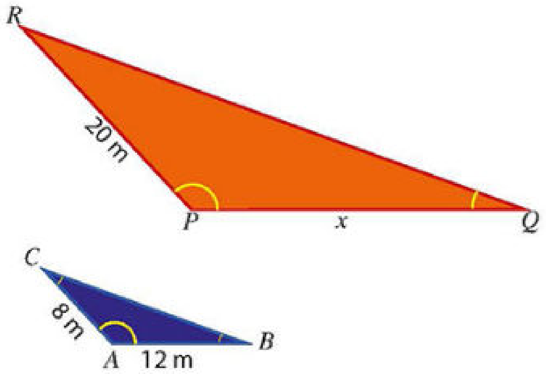
1. ¿Cuántas parejas de triángulos congruentes se pueden obtener a partir de la siguiente figura?





2. Encuentra parejas de triángulos congruentes y de triángulos semejantes dentro del trapecio isósceles $\square ABCD$, en el que $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.

3. Calcula el valor de x, que es la longitud del lado $\overline{PQ}$, a partir de la semejanza de los triángulos $\triangle ABC \sim \triangle PQR$.



4. ¿Es necesario un criterio ALA para determinar la semejanza de triángulos? Explica por qué y comparte tu explicación con tus compañeros de grupo.

Habilidades digitales

Busca en internet información relacionada con el tema "Congruencia de triángulos" con la finalidad de que conozcas otros criterios para la igualdad de estos polígonos. Te sugerimos comenzar visitando el sitio electrónico:
www.educarchile.cl/ech/pro/app/detalle?ID=137527
(Consulta: 12 de enero de 2015).

Proporcionalidad y funciones

Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad

ACTIVIDADES INICIALES

Tarjetas de información

Analicen cada tarjeta de información, elaborada por Teresa y Antonio, describan la situación real que se representa en cada caso y completen lo que falta.

Gasto mensual de costales de azúcar

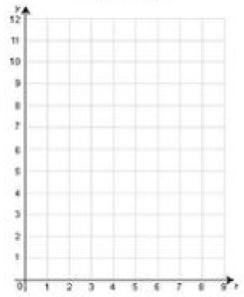
Expresión algebraica

$y = 12 - 2x$

Tabla

x	y
0	
1	
2	
3	
4	
5	

Gráfica



Valor de los chocolates

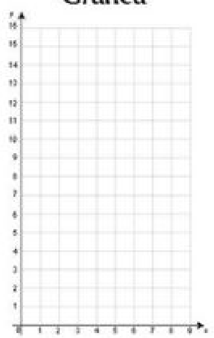
Expresión algebraica

$y =$

Tabla

x	y
0	0
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15

Gráfica



Edades de Gisela y Homero

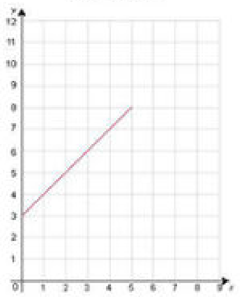
Expresión algebraica

$y =$

Tabla

x	y
0	3
	4
2	
	6
4	

Gráfica



Presenten sus respuestas y soliciten al profesor que las valide.

¿Cómo se puede identificar una relación de proporcionalidad?

Úrsula y Damián quieren conocer las características de una **relación de proporcionalidad** y la manera en que se manifiesta en sus diferentes representaciones: gráfica, tabular y algebraica.

Para lograr su propósito, analizan lo que sucede en diferentes situaciones con las variables incluidas en la fórmula de la velocidad.

$$velocidad = \frac{distancia}{tiempo} \qquad v = \frac{d}{t}$$

¿Qué se puede afirmar acerca de los cambios que sufren las variables d (distancia) y t (tiempo) cuando un objeto se mueve de tal manera que la variable v (velocidad) permanece constante?, por ejemplo, ¿qué sucede cuando $v = 84$ km/h?

Glosario

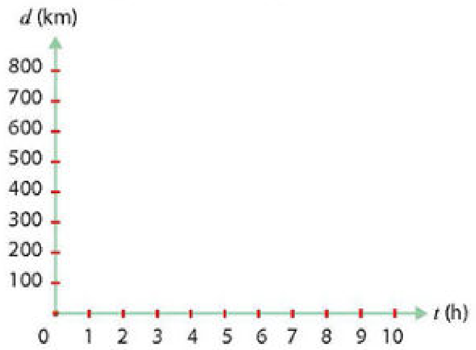
relación de proporcionalidad. Es aquella en la que dos magnitudes o cantidades variables x, y se modifican de tal manera que su cociente o producto permanece constante. Si $\frac{y}{x} = k$, se trata de una relación de proporcionalidad directa. Si $x\,y = k$, la relación de proporcionalidad es inversa.

Toma en cuenta la situación planteada por Damián y Úrsula para que realices lo que se solicita enseguida.

1. ¿Se puede obtener una expresión algebraica de la forma $y = kx$?, ¿cuál es el significado de las variables x, y y de la constante k?
2. ¿Se puede afirmar que se trata de una relación de proporcionalidad?, ¿por qué?
3. ¿Qué procedimientos se pueden seguir para obtener la representación tabular de la expresión obtenida?

t (h)	0.5	1.0	1.5		2.5		8
d (km)				168		224	

4. ¿Cómo sería la representación gráfica de la expresión obtenida?



Redacten un escrito sobre las características que tiene una relación de proporcionalidad directa. Indiquen después, cómo se identifican dichas características en cada una de las representaciones de la relación de proporcionalidad.

Damián y Úrsula continuaron con el análisis de la fórmula de la velocidad y se plantearon la siguiente pregunta:

¿Qué sucede con las variables t y v de la fórmula de la velocidad cuando la variable d (distancia) permanece constante?

Consideraron que un móvil deberá recorrer $d = 600$ km y escribieron algunos valores posibles para t y v.

$$v = \frac{d}{t} \qquad v = \frac{600 \text{ km}}{t} \qquad vt = 600 \text{ km}$$

t (horas)	3	4	5	6				
v (km/h)					75	60	50	25
d (km)								

Analicen la situación anterior y realicen las siguientes actividades.

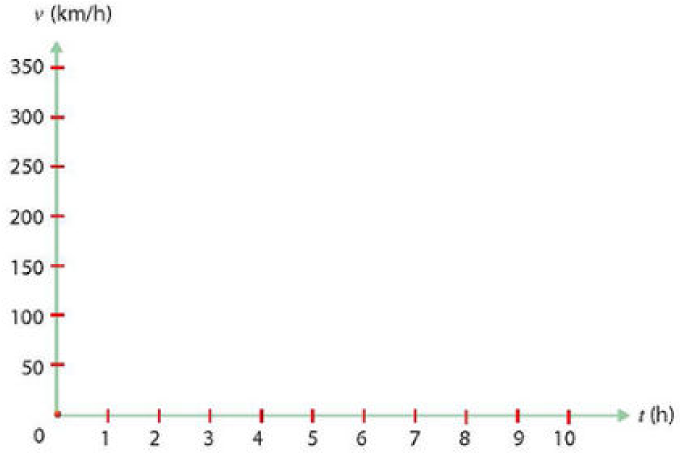
1. Completen la representación tabular y describan los procedimientos usados para calcular los valores faltantes. ¿Cuál es la característica principal de cada par de valores (t, v) de la tabla?
2. Comparen sus respuestas con las obtenidas por otros equipos.

Comprendo

Si en la fórmula de la velocidad $v = \frac{d}{t}$ la distancia recorrida permanece constante, es decir $d = k$, entonces las variables t y v presentan una relación de proporcionalidad inversa.

Traza la representación gráfica de la relación de proporcionalidad inversa que presentan las variables t y v en la fórmula de la velocidad, cuando la distancia recorrida permanece constante.

Describe las características de la representación gráfica de una relación de proporcionalidad inversa.



Actividad extraclase

Para que aprendas a diferenciar relaciones de proporcionalidad de las que no lo son, estudia el "Capítulo V" del libro *El hombre que calculaba* de Malba Tahan, mismo que puedes consultar en tu Biblioteca de Aula o Escolar (Libros del Rincón).

Analicen las consideraciones que hace Malba Tahan sobre "El problema del joyero" y establezcan las características de una relación de proporcionalidad directa.

Identificación de relaciones de proporcionalidad directa e inversa

Analicen cada una de las preguntas, respóndanlas y justifiquen sus respuestas.

1. ¿Cuáles expresiones son representaciones algebraicas de relaciones de proporcionalidad?, ¿por qué?

$y = 21x$	$d = 40t$	$y = kx$	$y = x^2$
$y = x + 2$	$v = \frac{100}{t}$	$y = \frac{20}{x}$	$xy = k$

2. ¿Qué tablas corresponden a relaciones de proporcionalidad?, justifiquen sus respuestas.

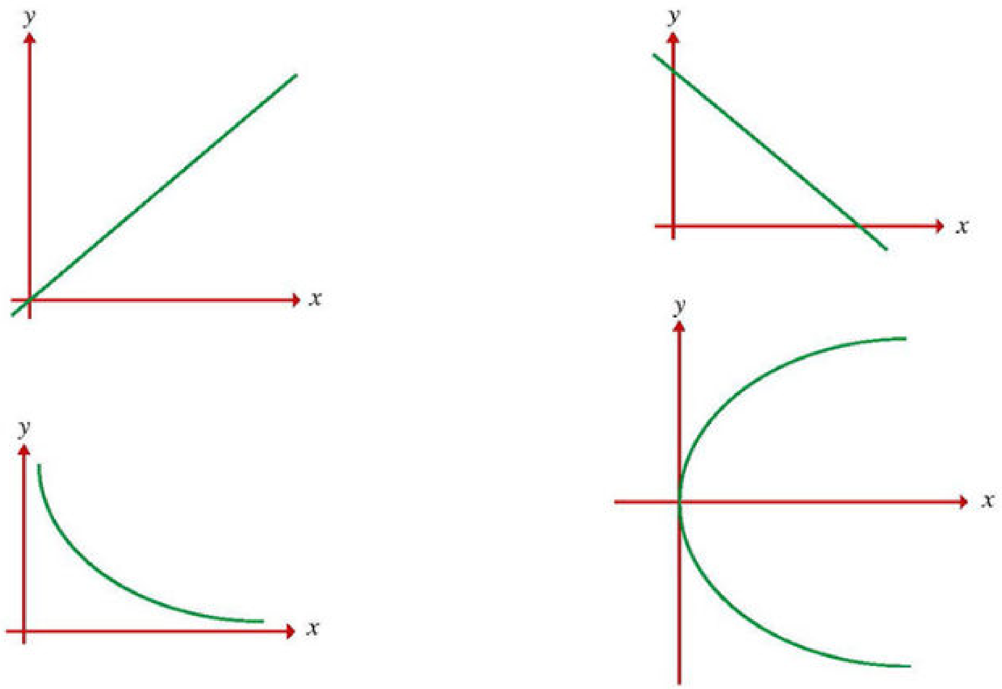
x	2	4	6	8
y	10	12	14	16

x	40	60	120	240
y	3	2	1	0.5

x	40	80	100	120
y	200	400	500	600

x	70	105	140	175
y	10	15	20	25

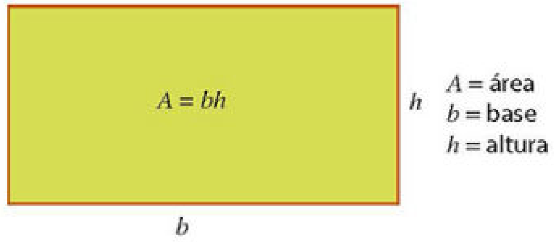
3. ¿Qué figuras representan gráficas de relaciones de proporcionalidad?



Generalizo

Las relaciones de proporcionalidad directa se pueden representar algebraicamente mediante expresiones de la forma $y = kx$.

Carlos y Berenice analizan las relaciones que se presentan entre las variables b, h y A de la fórmula para calcular el área de los rectángulos.



Continúa con el estudio que comenzaron Carlos y Berenice y realiza lo que se solicita.

1. Completa la representación tabular de la relación de **proporcionalidad inversa** entre las variables b y h.

b	10	20	30	40		
h	30			7.5	6	5
A				300		

a) Determina el tipo de proporcionalidad que se presenta entre las variables b y h, y escribe la representación algebraica de dicha relación; además, en tu cuaderno realiza la gráfica de la relación de proporcionalidad entre tales variables.

Glosario

proporcionalidad inversa. Dos variables x y y presentan una proporcionalidad inversa cuando su producto permanece constante.

2. Considera que la base de los rectángulos permanece constante $b = k$.

$$A = kh$$

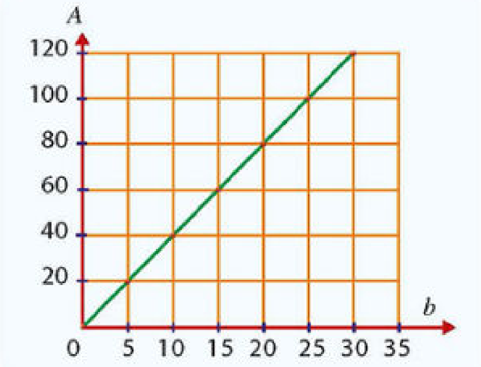
3. Describe la relación de proporcionalidad que existe entre las variables h y A. Completa la representación tabular, considerando el valor constante $k = 5$.

h	6	12	18	24	30	36	42
A							

4. Traza la representación gráfica correspondiente.

Aplico

Analiza la representación gráfica de la relación de proporcionalidad entre las variables b y A, cuando la altura (h) permanece constante. Escribe su representación algebraica.



Revisen sus respuestas y justifíquenlas.

EVALUACIÓN FORMATIVA

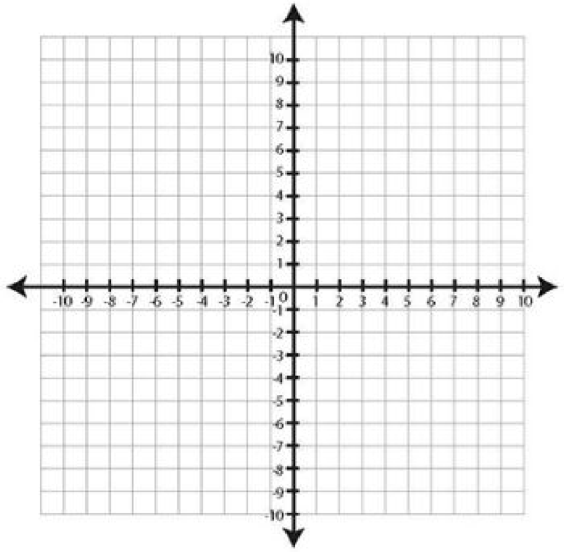
Lee con atención los enunciados y haz lo que se solicita en cada caso.

1. Raúl contrató a 12 personas para realizar una obra en 15 días, trabajando 8 horas diarias. Si Sara pretende hacer la misma obra con 16 personas, trabajando 10 horas diarias, ¿cuántos días requerirán para terminar?

2. Completa la tabla de valores y traza la representación gráfica de la relación establecida mediante la representación algebraica que se presenta a continuación; toma en cuenta algunos valores negativos para las variables x y y. Explica la razón por la que x no puede ser el número 0.

$y = \frac{10}{x}$

x	-5	-2	-1	1	2	5	10
y							



3. Explica por qué la siguiente relación no es de proporcionalidad.

$$y = 4x + 2$$

4. Redacta un escrito en el que describas la relación de proporcionalidad de las variables d (distancia) y v (velocidad) en la fórmula de la velocidad, cuando el tiempo (t) permanece constante.

Preséntalo a tu profesor para que lo valide.

Habilidades digitales

Para que amplíes tus conocimientos sobre proporcionalidad, haz una búsqueda en internet. Puedes iniciar en la siguiente dirección electrónica:
http://www.aulamatematica.com/ESO3/06_Proporc/3ESO_index06.htm
(Consulta: 24 de septiembre de 2014).

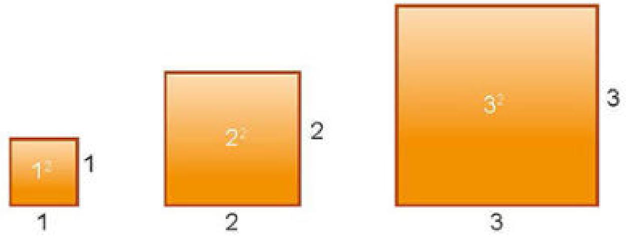
Proporcionalidad y funciones

Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas

ACTIVIDADES INICIALES

Longitud y área

Sonia y Gerardo analizan las relaciones que se presentan entre las variaciones que sufren dos variables, y les interesa conocer la relación que se presenta entre la longitud de los lados de los cuadrados y las áreas de éstos.



Analicen la situación planteada para que contesten lo que se pide en cada punto.

1. Si el valor de la longitud se representa con x y el valor correspondiente del área con y, ¿cómo se puede obtener una representación tabular de la relación de variación entre las variables x y y?

2. Completen la representación tabular para la relación de variación indicada en el punto 1.

x = longitud de un lado	1	2	3	4		6		
y = área del cuadrado					25		121	400

3. ¿Cómo se puede obtener una expresión algebraica para la relación entre las variables x y y?

Comparen las respuestas obtenidas y verifiquen que sean correctas.

Actividad extraclase

1. Escribe en tu cuaderno la representación tabular correspondiente a la siguiente expresión algebraica: $y = -2x^2$

2. Escribe la representación algebraica que corresponde a la siguiente representación tabular de una relación de variación entre las variables x y y.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	0	3	12	27	48	75	108	147

Glosario

relación de variación cuadrática. Es la relación que se puede expresar en la forma $y = ax^2 + bx + c$

Mario y Gisela analizan la siguiente situación y pretenden determinar la expresión algebraica o la regla de correspondencia entre las variables x y y, además, desean saber, si se trata de una **relación de variación cuadrática**.

Rosaura trazó un rectángulo y determinó que su perímetro es de 60 cm. ¿Cuántos rectángulos con un perímetro de 60 cm se pueden trazar?

Si la base de uno de estos rectángulos es x, ¿cómo se puede representar la altura? ¿Cuál es la expresión algebraica que se puede usar para representar el área y de los rectángulos cuyo perímetro es 60 cm?

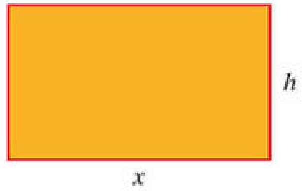
Realiza la representación tabular de la situación anterior.

$P =$
$A =$

x = base del rectángulo	5	10	15	20	25	30
y = área del rectángulo						

Elaboren y describan las representaciones tabular y algebraica para cada una de las situaciones que se presentan a continuación.

1. Con 120 m de valla, Mario pretende hacer una cerca rectangular para un terreno que colinda con un río, evitando cercar el lado colindante al río, ¿cuantos rectángulos puede formar con la valla y de qué dimensiones?, ¿cuál es el área de cada uno de los rectángulos que se pueden cercar?



2. Gisela va a diseñar un jardín con forma de corona circular alrededor de una pila circular de 2 m de radio. ¿Cómo se puede obtener el área del jardín que pretende construir?

Analicen sus resultados junto con el profesor para que los valide.

Lanzamiento vertical

En el curso de Física, se estudiaron las relaciones que existen entre la altura (h) y la velocidad vertical (v) de un objeto, al ser lanzado verticalmente. Éstas son las fórmulas correspondientes:

$$v(t) = v_0 - gt$$

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$$

t = tiempo (en segundos)

$g = 9.8\ \text{m}/_{\text{s}^2}$ es la aceleración debida a la gravedad

v_0 = velocidad inicial

h_0 = altura inicial

Analicen cada una de las fórmulas anteriores y realicen lo que se solicita a continuación.

Damián se encuentra en la orilla de la azotea de un edificio de 12 m de altura y lanza una pelota verticalmente hacia arriba, con una velocidad inicial de 5 m/s. Calculen los valores de h y v correspondientes para algunos valores de t.

1. Determinen las representaciones algebraicas para h y v en términos de t.
2. Elaboren las representaciones tabulares para h y v en función de t.
3. Calculen la máxima altura que alcanzará la pelota lanzada por Damián y el instante t en que esto sucederá.
4. Calculen la velocidad con que se moverá la pelota en el momento de alcanzar su máxima altura.
5. ¿En qué instante t la pelota tocará el suelo?

Pienso

Sustituye los valores $v_0 = 0$, $h_0 = 0$ y explica el significado físico de éstos.

Relaciones de variación cuadrática identificadas en la Biología

Homero y Gloria investigaron acerca de la presencia de relaciones de variación cuadrática en los estudios sobre la vida humana. Obtuvieron una expresión algebraica para calcular la esperanza de vida o el número de años que puede vivir una persona que tiene una cierta edad (t años).

Esperanza de vida

$$v = 0.0054t^2 - 0.46t + 95$$

Completa la representación tabular de la relación de variación cuadrática correspondiente a la esperanza de vida. Realiza los cálculos como en el ejemplo.

Si una persona tiene $t = 30$ años, ¿cuál es su esperanza de vida?

$y = 0.0054(\ \ )^2 - 0.46(\ \ ) + 95$

$y = 0.0054(30)^2 - 0.46(30) + 95$

x	30	35	40	45	50	55	60	65
y								

Analicen la siguiente situación, realicen lo que se solicita y comenten sus resultados con el profesor.

1. El consumo de oxígeno (**microlitros** por hora) de una especie de escarabajos se puede calcular, aproximadamente, utilizando la siguiente expresión algebraica de la relación de variación cuadrática entre las variables x y y.

Glosario

microlitros. Unidades de volumen equivalentes a la millonésima parte de un litro.

y = Consumo de oxígeno

x = Temperatura del aire en grados Celsius

$$y = 0.45x^2 - 1.65x + 50.75$$

Calculen los valores necesarios para completar la representación tabular de la expresión algebraica anterior.

x	10	12	14	16	18	20	22	24
y								

Aplico

A una reunión asisten n personas, si cada una de ellas saludó a las demás, ¿cuántos saludos hubo en total?

a) Usa una representación algebraica para obtener la respuesta.

b) Lleva a cabo la representación tabular para conocer el resultado de algunos valores específicos de n.

Relaciones de variación cuadrática identificadas en la economía

Samuel y Norma comentaron con sus familiares acerca de las relaciones de variación cuadrática, y René les dijo que estas representaciones algebraicas y tabulares se emplean para explicar algunos fenómenos económicos.

René explicó que la demanda (x) de un artículo o producto y el precio (P) se relacionan de la siguiente manera:

$$P = 60 - 0.0001x$$

Norma señaló que esa no era una relación de variación cuadrática, pero René continuó explicando que el ingreso total de un negocio o fábrica depende del precio P y del número de artículos x que se demandan, así la relación correspondiente es: ingreso total $= Px$. Con lo cual la expresión algebraica resulta ser:

$$y = (60 - 0.0001x)x$$

Samuel afirmó: Ahora sí tenemos una relación de variación cuadrática entre las variables x y y.

Analicen la situación anterior y hagan lo que se pide en cada caso.

1. ¿Por qué Norma tenía razón?, al decir:

   $P = 60 - 0.0001x$ no es una relación de variación cuadrática.

2. ¿Cómo se puede explicar que René también estaba en lo cierto?

Aclarando que $y = (60 - 0.0001x)x$ es la representación algebraica de una relación de variación cuadrática.

3. Calculen los valores que faltan para complementar la representación tabular de la relación de variación cuadrática entre las variables x y y.

x	1000	5 000	10000	20 000	30 000	40 000
y						

Justifico

¿Cómo se calcula el monto que se obtendrá de una inversión de capital C, a una tasa de interés r, después de 2 años?
Para el primer año se toma el capital inicial de la inversión, al cual se le suma ese mismo capital multiplicado por la tasa de interés, obteniendo así un nuevo monto (M_1). Para el segundo año ahora se toma como capital inicial el obtenido después de un año (M_1) y se repite el mismo procedimiento.

$M_0 = C$

$M_1 = C + rC$

$M_1 = C(1 + r)$

$M_2 = M_1 + M_1 r$

$M_2 = C(1 + r) + C(1 + r)r$

$M_2 = (C + Cr)(1 + r)$

$M_2 = C(1 + r)(1 + r)$

$M_2 = C(1 + r)^2$

Escribe la representación algebraica para una inversión inicial de $50 000.00 durante 2 años, considerando diferentes valores para la tasa de interés r.

Completa la representación tabular.

r = tasa de interés	$10/100$	$15/100$	$20/100$	$30/100$	$40/100$
M = monto					

Analicen las siguientes situaciones y completen la representación tabular en cada caso.

1. El costo $C(x) = y$ de producir x artículos se expresa algebraicamente mediante $y = 0.1x^2 + 60x - 8$.

Calculen los valores de costo (y), conociendo el número de artículos (x), para completar la representación tabular de la expresión algebraica.

x	100	200	300	400	500
y					

2. La utilidad $y = U(x)$ que se obtiene al vender x artículos se representa algebraicamente mediante $y = 0.4x^2 + 120x - 20$.

Calculen los valores de la utilidad (y), conociendo el número de artículos vendidos (x), para completar la representación tabular de la expresión algebraica.

x	50	150	250	300	350	400
y						

Presenten sus respuestas al profesor para que las valide.

Comunico

Redacta un texto en el cual describas la utilidad de lo que has aprendido para aplicarlo en la resolución de problemas, situaciones o fenómenos de las disciplinas que se mencionaron (física, biología y economía). Asimismo, señala en qué otras puedes emplear estos conocimientos.

Generalizo

Expresión algebraica de una relación de variación cuadrática
Las expresiones algebraicas de la forma $y = ax^2 + bx + c$ representan relaciones de variación cuadrática entre las variables x y y cuando se cumplen las siguientes condiciones:

a) x es la variable independiente.
b) a, b y c son números determinados o constantes; a no puede ser 0; es decir, $a \neq 0$.
c) y es la variable dependiente.
d) $y = ax^2 + bx + c$ también recibe el nombre de regla de correspondencia entre las variables x y y, y permite calcular el valor de y para un valor particular seleccionado de x.
e) Mediante la aplicación de la regla de correspondencia es posible obtener la representación tabular de la relación de variación cuadrática.

Para cada una de las expresiones algebraicas de relaciones de variación cuadrática, determina los valores a, b y c. Completa las representaciones tabulares correspondientes, obteniendo el valor de la variable dependiente a partir de los distintos valores dados a la variable independiente.

1. $h = \frac{1}{2}gt^2$

t	1	5	10	20	30
h					

2. $A = \pi r^2$

r	1	10	50	100	200
A					

3. $d = \frac{1}{2}at^2$; $a = 20\ m/s^2$

t	4	8	12	16
d				

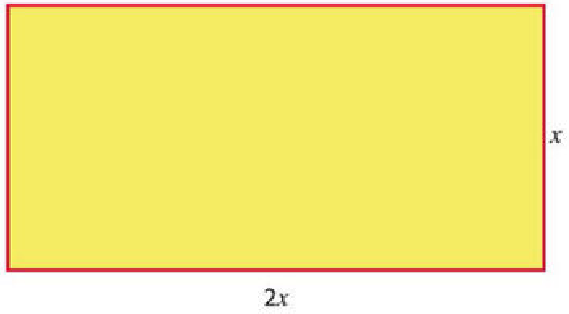
4. $y = 3x^2 - 9x + 8$

x	1	3	6	9	12	15	18
y							

EVALUACIÓN FORMATIVA

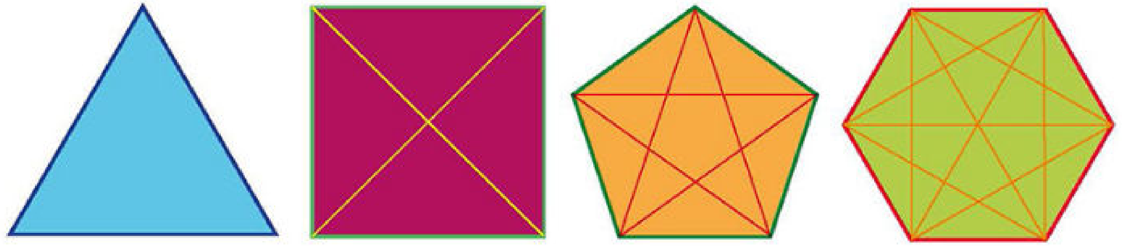
Realiza lo que se solicita a continuación.

1. Erasmo se dedica a la fabricación de ventanas. El metro cuadrado de vidrio cuesta \$200.00 y el metro lineal de solera de aluminio cuesta \$150.00. A partir de la ilustración, escribe la expresión algebraica que representa el costo de la ventana de la figura.



2. Representa en una tabla la relación de variación cuadrática expresada algebraicamente mediante $y = -3x^2 + 5x - 7$.

3. Comprueba que la expresión algebraica $y = \frac{x(x-3)}{2}$ representa el número de diagonales de un polígono que tiene x lados.



4. Realiza un escrito en el cual describas los diferentes términos que conforman una expresión algebraica de una relación de variación cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + c$. Preséntalo a tu profesor y solicita que valide cada una de tus afirmaciones.

Habilidades digitales

Con el propósito de que conozcas otras aplicaciones de las relaciones de variación cuadrática, realiza una búsqueda en internet. Comienza consultando la siguiente dirección electrónica:
http://www.educar.org/enlared/planes/paginas/funcioncuadra.htm
(Consulta: 24 de septiembre de 2014).
Selecciona dos aplicaciones; después describe la representación algebraica y elabora la representación tabular correspondiente.

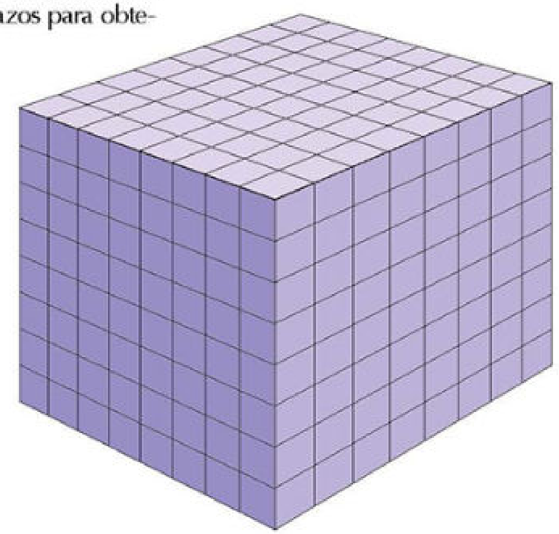
Nociones de probabilidad

Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes

ACTIVIDADES INICIALES

Cubos y cubitos

Leticia y Ernesto hicieron un cubo sólido de madera de $80 \times 80 \times 80$ cm^3; pintaron todas sus caras y las cuadricularon, con una separación de 10 cm entre cada línea. Posteriormente, cortaron los trazos para obtener cubos de menor volumen.



Responde la interrogante y realiza lo que se indica en cada caso.

1. ¿Cuántos cubos de volumen igual a $10 \times 10 \times 10$ cm^3 obtuvieron?

2. Si juntan y revuelven todos los cubos, y escogen uno de ellos al azar, calcula la probabilidad de:

   a) Seleccionar un cubo con 0 caras pintadas
   b) Obtener un cubo con una cara pintada
   c) Sacar un cubo con 2 caras pintadas
   d) Escoger un cubo con 3 caras pintadas
   e) Seleccionar un cubo con 4 caras pintadas
   f) Obtener un cubo con 5 caras pintadas
   g) Escoger un cubo con 6 caras pintadas

Comparen y comprueben sus respuestas.

Después de analizar sus respuestas, contesten las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál es el resultado más probable?
b) ¿Cuáles son los resultados menos probables?
c) ¿Cuál es el significado de una probabilidad igual a 0?
d) ¿Pueden describir un evento para el cual se tenga una probabilidad igual a 1?, ¿cuál sería ese evento?
e) Soliciten al profesor que valide sus respuestas.

¿Cuál es la escala de la probabilidad?

Ramiro y Olga desean conocer los valores de la probabilidad de un evento aleatorio, para lo cual analizan lo que puede suceder con el lanzamiento de dos dados. Los resultados posibles en la suma de los puntos de los dos dados, se pueden representar con el siguiente **espacio muestral**.

$$E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \text{ y } 12\}$$

Glosario

espacio muestral. Es la colección o conjunto de todos los resultados posibles de un experimento o fenómeno aleatorio.

¿Cómo se puede calcular la probabilidad de obtener cada uno de los resultados de la suma de los dos dados?

Calcula, por ejemplo: $P(x + y) = 7$.

Analicen lo que sucede en los siguientes casos.

1. El evento A se forma con los elementos 2, 3, 4 y 5.

$$A = \{x + y \leq 5\} \qquad A = \{2, 3, 4, 5\}$$

¿Cuál es el valor de $P(A)$?

2. El evento B se integra por los elementos que cumplen con que la suma de los puntos es 1. ¿Cuál es el valor para $P(B)$?
3. Generen y describan un evento C para el que $P(C) = 1$.
4. Justifiquen el hecho de que la probabilidad de un evento es un número mayor o igual a 0, pero menor o igual a 1.

$P(A)$

0 — 1

Justifico

La probabilidad de un evento es un número que se encuentra entre 0 y 1.
$0 \leq P(A) \leq 1$
Si $P(B) = 0$, entonces se trata de un evento imposible.
Si $P(C) = 1$, entonces se trata de un evento seguro, también llamado evento determinístico.

Para que fortalezcan su aprendizaje acerca de la escala de la probabilidad, consulten el tema "Calcula probabilidades" en el libro *Apuntes de matemáticas* de Carmen Burgués, Roser Codina y Manuel Montanuy, mismo que pueden encontrar en su Biblioteca de Aula o Escolar (Libros del Rincón).

Organicen un debate para analizar y establecer la escala de la probabilidad, con base en los ejemplos planteados por los autores del libro *Apuntes de matemáticas*.

Clasificación de los eventos de acuerdo con su probabilidad de ocurrencia

Analicen y expliquen los diferentes tipos de eventos aleatorios de acuerdo a su probabilidad.

$P(A)\ P(B)$ — $P(C)$ — $P(D)\ P(E)$

0 — 0.1 — 0.5 — 0.9 — 1

1. A es un evento imposible.
2. B es un evento poco probable.
3. C es un evento probable.
4. D es un evento muy probable.
5. E es un evento seguro.

Para cada uno de los siguientes fenómenos aleatorios describe ejemplos de: un evento imposible, evento poco probable, evento probable, evento muy probable y evento seguro.

1. Lanzamiento de un dado.

   $E = \{1, 2, 3, 4, 5 \text{ y } 6\}$

2. Familias con 3 hijos.

   $E = \{(o, o, o), (o, o, a), (o, a, o), (a, o, o), (o, a, a), (a, o, a), (a, a, o), (a, a, a)\}$

3. Lanzamiento de 2 monedas

   $E = \{(a, a), (a, s), (s, a), (s, s)\}$.

4. Un cubo sólido de $100 \times 100 \times 100\ cm^3$ pintado de amarillo y recortado en cubos de $10 \times 10 \times 10\ cm^3$.
5. Extracción al azar de una bola de una urna que contiene 6 bolas rojas, 5 verdes y 3 amarillas.

Revisen sus respuestas y escriban una definición para cada uno de los siguientes términos.

a) Evento imposible
b) Evento poco probable
c) Evento probable
d) Evento muy probable
e) Evento seguro

Bloque UNO

¿Cuáles son las características de los eventos mutuamente excluyentes?

Susana y Fausto pretenden establecer algunas características para parejas de eventos aleatorios, a partir de los resultados posibles del lanzamiento de 2 dados.

Así determinaron los siguientes eventos:

$$A = \{la\ suma\ de\ los\ puntos\ es\ menor\ que\ 7\}$$
$$B = \{la\ suma\ de\ los\ puntos\ es\ mayor\ que\ 8\}$$

Usen las siguientes definiciones para realizar lo que se solicita en los casos que se presentan a continuación.

Eventos mutuamente excluyentes

1. Los eventos A y B son mutuamente excluyentes, si la aparición de uno de ellos elimina la posibilidad de realización del otro en una misma repetición del fenómeno aleatorio.
2. Los eventos A y B son mutuamente excluyentes cuando no tienen un resultado posible en común.

1. Expliquen la equivalencia de las dos definiciones de eventos mutuamente excluyentes.
2. Apliquen las definiciones anteriores para justificar la siguiente afirmación.

   "Los eventos A y B planteados por Fausto y Susana son mutuamente excluyentes".

3. Analicen los eventos del fenómeno aleatorio que consiste en lanzar 2 monedas y determinen parejas de eventos mutuamente excluyentes.

$$A = \{la\ primera\ moneda\ cayó\ águila\}$$
$$B = \{la\ segunda\ moneda\ cayó\ sol\}$$
$$C = \{la\ primera\ moneda\ cayó\ sol\}$$

Comprendo

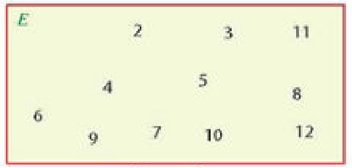
Dos eventos no son mutuamente excluyentes entre sí cuando la realización de uno de ellos no impide la realización del otro; es decir, cuando pueden darse los dos eventos de manera simultánea.

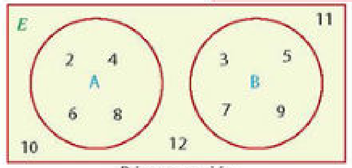
$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$A = \{El\ resultado\ es\ par\}$$
$$B = \{El\ número\ es\ menor\ que\ 5\}$$

¿Cuáles son las características principales de los eventos complementarios?

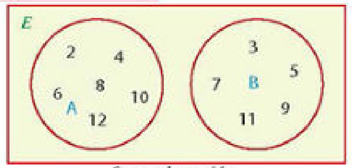
Isabel y Fernando desean aprender acerca de los eventos complementarios que se pueden formar con los resultados posibles de un fenómeno aleatorio.

Utilizan diagramas para representar las diferentes posibilidades presentes entre dos eventos, A y B, lo cual surgió a partir de los resultados observados en el lanzamiento de 2 dados.

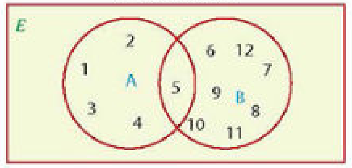




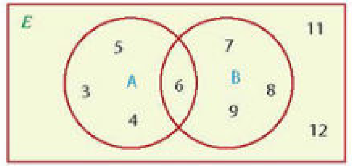
Primera opción



Segunda opción



Tercera opción

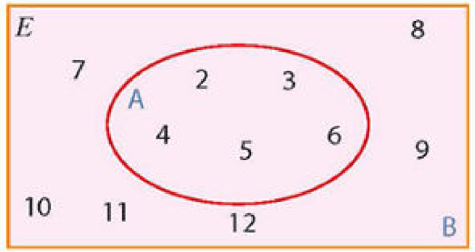


Cuarta opción

Después de analizar cada una de las situaciones, dijeron:

Fernando: sólo en la segunda opción se tienen dos eventos, A y B, que son complementarios.

Isabel: también en la figura de la derecha se tienen dos eventos, A y B, que son complementarios.



$$A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$B = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Analicen la situación anterior y realicen lo que se pide a continuación.

1. ¿Por qué las otras opciones no presentan eventos complementarios?
2. ¿Cuáles son las condiciones que deben cumplir dos eventos, para ser complementarios?
3. Escriban una definición para el término "eventos complementarios"

Pienso

A partir de los resultados posibles del fenómeno aleatorio que consiste en el lanzamiento de 2 dados, determina otras posibilidades para obtener eventos complementarios.

¿Cuál es la diferencia esencial entre un par de eventos dependientes y un par de eventos independientes?

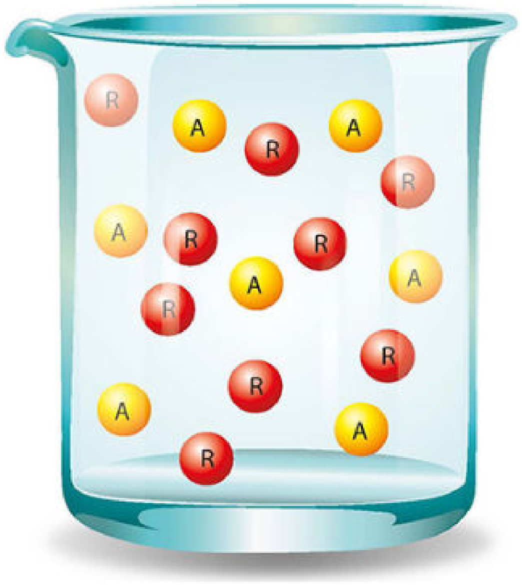
Rosaura y Javier analizan lo que puede suceder al extraer aleatoriamente bolas de un frasco.

1. Extracciones sucesivas de una bola con reemplazo.

De un frasco que contiene 16 bolas, 9 rojas y 7 amarillas, Rosaura saca una bola, anota su color y la regresa. Después extrae una segunda bola y registra su color. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea roja?

2. Extracciones sucesivas de una bola sin reemplazo.

Javier explica que el proceso es el siguiente: se extrae una bola, se registra de que color es y se deja fuera del frasco; después se extrae una segunda bola y se anota su color. ¿Cuál es la probabilidad de que ésta sea roja?



Analicen las situaciones presentadas por Rosaura y Javier, y respondan las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál es la respuesta correcta para las extracciones con reemplazo?
2. ¿Cuáles son las posibles respuestas para las extracciones sin reemplazo?
3. ¿En qué caso se trata de **eventos independientes**?, ¿por qué?
4. ¿Se puede afirmar que en el otro caso se trata de eventos dependientes?, ¿por qué?
5. En una urna se tienen 5 monedas de \$10.00 y 4 de \$5.00 ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer al azar 3 monedas en forma sucesiva y con reemplazo, las 3 sean de \$10.00?
6. ¿Cómo se puede saber si dos eventos A y B son independientes?
7. Samuel ha lanzado 3 monedas y sólo han caído águilas, ¿cuál es la probabilidad de que al lanzar una cuarta moneda caiga sol?

Justifiquen sus respuestas.

Glosario

eventos independientes. Son dos eventos aleatorios tales que la probabilidad de que suceda el segundo no se ve afectada por la ocurrencia del primero.

EVALUACIÓN FORMATIVA

Analiza cada una de las situaciones que se describen a continuación y realiza lo que se solicita.

1. Para el lanzamiento de 3 dados, calcula la probabilidad de que la suma de los puntos sea 15, si en el primer dado cayó 2. Indica de qué tipo de evento se trata.
2. Un fenómeno aleatorio consiste en seleccionar un número al azar. Describe dos eventos A y B tomados del conjunto muestral E, de tal manera que sean mutuamente excluyentes, pero que no sean complementarios.

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \text{ y } 10\}$$

3. Edmundo participa en una rifa para la que se han vendido 1 000 boletos. Describe un evento aleatorio para cada una de las siguientes características.

a) Evento imposible
b) Evento poco probable
c) Evento probable
d) Evento muy probable
e) Evento seguro

4. Una familia tiene un hijo varón. ¿Cuál es la probabilidad de que su segundo hijo sea mujer?, ¿se trata de eventos dependientes o de eventos independientes?

Justifica tus respuestas y comunícalas al profesor para su validación.

Habilidades digitales

Con el propósito de que conozcas otros eventos independientes, realiza una búsqueda en internet. Puedes iniciar consultando la siguiente página electrónica:
http://arquimedes.matem.unam.mx/Vinculos/Secundaria/2_segundo/2_Matematicas/2m_b04_t04_s01_descartes/doc/info.html
(Consulta: 24 de septiembre de 2014).
Selecciona dos ejemplos de eventos independientes y describe sus características esenciales.

Bloque UNO

Análisis y representación de datos

Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación

ACTIVIDADES INICIALES

Estudios estadísticos

Cada uno de los integrantes del grupo deberá copiar en una hoja tamaño carta el siguiente cuestionario. Para que posteriormente lo respondan.

Censo escolar

Estado o entidad federativa: ______

Municipio o delegación: ______

Localidad: ______

Escuela: ______

Nombre: ______ Sexo: M ☐ F ☐

Domicilio: ______

Edad: ______ Grado que cursa: ______

Vives con: Padres ☐ Otros familiares ☐ Otras personas ☐

¿Tienes un empleo?, Sí ☐ No ☐

Actividad a la que te dedicarás después de terminar la secundaria: ______

Profesión u ocupación que deseas desempeñar en el futuro: ______

Lugar donde deseas vivir cuando seas adulto: ______

Deporte que practicas: ______

Número de hermanos: ______

¿Has padecido alguna enfermedad en este año? Sí ☐ No ☐

Cada equipo escogerá un tema y alguna pregunta del cuestionario; después, deberá recopilar la información correspondiente de todos los alumnos y presentar los resultados obtenidos ante el grupo.

Soliciten al profesor que revise y valide cada una de las presentaciones realizadas por los equipos.

CONSTRUYO MIS CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES

¿Qué es una población estadística?

Aurelio y Rebeca escogieron la pregunta:

¿Tienes un empleo? Sí ☐ No ☐

Decidieron aplicarla para conocer la situación de los alumnos de tercer grado, para saber cuántos estudian y trabajan.

Determinaron que la **población estadística** para su estudio serían los 185 estudiantes de tercer grado de secundaria. Después de aplicar el cuestionario a los integrantes de esta población, analizaron los resultados de la pregunta que escogieron, para lo cual contaron las respuestas marcadas con Sí y las marcadas con No. Hicieron algunos cálculos y presentaron los siguientes resultados:

Glosario

población estadística. Es la colección de individuos, objetos o medidas con características en común que los identifica.

De los 185 estudiantes de tercer grado, 63 trabajan y estudian, mientras que 122 sólo estudian.

¿Tienes un empleo?		
Sí	No	Total
63	122	185

Alumnos que trabajan	63
Alumnos que no trabajan	122
Total	185

Conclusiones:
1. El 34.05% de los alumnos de tercer grado estudia y trabaja.
2. El 65.95% de los alumnos no trabaja.

Comprendo

La población estadística determina la cobertura o alcance de un estudio estadístico.

Tomando en cuenta que la población es el conjunto de elementos o individuos que interesan en un estudio estadístico, determina cuál puede ser ésta en cada caso. Justifica cada una de tus respuestas.

a) La estatura promedio de los futbolistas profesionales de México	b) Los alimentos preferidos por los alumnos de la escuela secundaria.	c) Las enfermedades que han padecido los familiares de los alumnos inscritos en la escuela secundaria.	d) El número promedio de hermanos que tiene un estudiante

¿Cómo se diseña una encuesta?

El primer procedimiento para hacer estudios estadísticos es la elaboración de un cuestionario para aplicarlo a los elementos de una población o parte de ella, es decir, a una muestra.

Por ejemplo si se pretenden conocer las preferencias por un candidato a un puesto público, se puede elaborar una **encuesta** con preguntas como la siguiente:

Glosario

encuesta. Es un estudio estadístico para recaudar datos mediante un cuestionario previamente elaborado.

frecuencia absoluta. Número de veces que aparece un valor en un estudio estadístico.

frecuencia relativa. Cociente entre la frecuencia absoluta de un valor y el número total de datos.

De acuerdo con su inclinación política, ¿a cuál de los candidatos apoya?

A	B	C	D	E

En este caso, la población estadística puede ser el conjunto de personas de una localidad de 1 000 habitantes y una muestra se puede conformar por 50 individuos. Después de aplicar la encuesta, pueden obtenerse las siguientes respuestas:

Muestra de 50 individuos									
A	B	B	B	C	C	C	A	D	E
D	D	E	A	A	A	B	B	B	B
D	E	E	E	C	A	B	D	E	E
E	E	B	C	D	A	B	B	D	D
A	A	B	C	D	A	B	B	D	D

Con base en la situación anterior, respondan lo que se pide en cada inciso.

a) ¿Cuál es el objetivo del estudio estadístico?
b) ¿Qué preguntas se pueden agregar para completar el cuestionario de la encuesta?
c) ¿Qué medios se pueden usar para aplicar la encuesta y así obtener la colección de respuestas?
d) Presenten la información obtenida en una tabla en la que se indiquen: candidato, **frecuencia absoluta** y **frecuencia relativa**.
e) Hagan la representación gráfica de la información mediante una gráfica de barras y una gráfica circular.
f) Analicen la información obtenida y elaboren algunas conclusiones del estudio estadístico.

Elaboren un procedimiento que se pueda seguir para el diseño y aplicación de una encuesta.

Comparen sus procedimientos con los de sus compañeros y analicen la conveniencia de replantearlos.

¿Cuáles son las formas de elegir una muestra?

Diseñen una encuesta para hacer un estudio estadístico que permita conocer las preferencias de diversión de los alumnos de su escuela. Tomen en cuenta posibilidades como: deportes, cine, televisión, paseos, natación, fiestas y otras que consideren frecuentes en su localidad.

Ante la imposibilidad de aplicar la encuesta a todos los estudiantes de la escuela, seleccionen una muestra de 50 alumnos, apliquen la encuesta y a partir de los datos obtenidos realicen lo siguiente:

1. Construyan una tabla de frecuencias absolutas y frecuencias relativas.
2. Representen gráficamente los resultados obtenidos.
3. Describan el procedimiento que usaron para seleccionar la muestra del estudio estadístico.
4. Escriban algunas conclusiones sobre el estudio estadístico realizado.

Realicen un estudio estadístico para conocer acerca de las redes sociales que usan los integrantes del grupo; para ello sigan los pasos que se indican enseguida:

1. Diseñar el cuestionario para la encuesta
2. Determinar la población estadística
3. Seleccionar la muestra, por ejemplo elegir al azar a 6 alumnos de un grupo, aplicarles la encuesta y presentar resultados en una tabla de datos
4. Repetir varias veces el paso 3
5. Aplicar la encuesta a toda la población estadística
6. Elaborar una gráfica que permita comparar los resultados obtenidos y escribir algunas conclusiones en torno a en qué otras de tus materias podrías utilizar lo que aprendiste en esta actividad, por ejemplo en Formación Cívica y Ética o Geografía

Justifico

Explica las siguientes afirmaciones:

1. Los estudios estadísticos hechos a partir de muestras sólo permiten obtener resultados aproximados.
2. La muestra tiene que ser aleatoria para que todos los elementos de la población estadística tengan la misma posibilidad de ser seleccionados.
3. Si la muestra no es aleatoria, se pueden obtener resultados con muchos errores.

Obtención de datos de una muestra y herramientas para su presentación

Describan en sus cuadernos las posibles maneras para obtener datos en un estudio estadístico. Además, determinen las ventajas y desventajas de cada una de ellas.

Entrevista personal
Ventajas: ______________________
Desventajas: ____________________

De puerta en puerta
Ventajas: ______________________
Desventajas: ____________________

Abordaje en la calle
Ventajas: ______________________
Desventajas: ____________________

Entrevista por teléfono
Ventajas: ______________________
Desventajas: ____________________

Mediante correo electrónico
Ventajas: ______________________
Desventajas: ____________________

Entrevista en centros comerciales
Ventajas: ______________________
Desventajas: ____________________

Comunico

Elabora una tarjeta para ejemplificar lo siguiente:
Los datos de un estudio estadístico son los valores que adquiere una variable en cada uno de los elementos que pertenecen a una muestra.

Ulises y Zafira hicieron un estudio estadístico sobre los medios de comunicación consultados por los ciudadanos. Observa los resultados que obtuvieron y realiza lo que se solicita.

Medio de comunicación	Frecuencia
Radio	卌 卌 卌 III
Televisión	卌 卌 卌 卌 卌
Revistas	卌 卌
Periódicos	卌 卌 卌 卌
Internet	卌 卌 卌 卌 卌 卌

a) Describe la herramienta que usaron para recabar y organizar la información obtenida.
b) Para presentar los datos obtenidos por Zafira y Ulises, construye una tabla de frecuencias, una gráfica circular y una gráfica de barras.
c) Escribe algunas conclusiones acerca de los estudios estadísticos.
d) Presenta tu trabajo al profesor para su validación.

Analiza la siguiente situación y realiza lo que se solicita en cada caso.

En el padrón electoral de un municipio del estado de Jalisco están registradas 14 000 personas. Los estudiantes de ciencias políticas desean saber el promedio de edad de los votantes. Obtuvieron los datos de 7 644 personas que votaron en las elecciones pasadas, de las cuales escogieron a 80 y registraron sus edades en la siguiente tabla.

Edades de 80 votantes en las elecciones pasadas									
43	34	41	19	21	25	37	44	19	22
20	27	32	31	20	29	62	31	41	20
21	38	25	52	19	19	18	18	35	28
18	19	24	45	64	30	30	18	22	24
20	21	42	39	40	54	24	22	44	62
36	39	28	21	26	21	36	47	51	45
22	31	73	49	42	36	35	21	20	21
66	25	24	35	21	22	44	24	24	28

1. Determina la población y la muestra del estudio estadístico. Realiza una tabla de frecuencias para organizar la información.
2. Calcula la **media**, la **mediana** y la **moda** de los datos. ¿Cuál es la **medida de tendencia central** más apropiada para completar el estudio estadístico? Justifica tu respuesta.
3. Elabora una gráfica de barras que muestre claramente la edad con mayor nivel de participación en las elecciones.

Escriban dos conclusiones en torno al estudio estadístico.

Glosario

media. Promedio de una colección de datos que se calcula sumando todos los datos y dividiendo el resultado entre el número total de ellos.

mediana. Es el valor o dato que se ubica en el centro de una colección ordenada de datos.

medida de tendencia central. Es un valor que se ubica en el centro de una colección de datos. Se calcula y se usa para representar a toda la colección: media, mediana y moda.

moda. Es el valor que más se repite en una colección de datos.

Habilidades digitales

Para que conozcas más acerca de las aplicaciones de las encuestas en los estudios estadísticos, haz una investigación en internet, puedes comenzar consultando la página:
http://www.inegi.org.mx/default.aspx
(Consulta: 24 de septiembre de 2014).
Selecciona y describe tres aplicaciones de las encuestas.

Evaluación final

Analiza cada uno de los planteamientos para que respondas lo que se solicita.

1. Escribe el espacio muestral para el lanzamiento de 4 monedas.

   a) Plantea dos eventos A y B que sean mutuamente excluyentes, pero que no sean complementarios.

   b) Escribe dos eventos A y B que sean mutuamente excluyentes y que también sean complementarios.

   c) Describe las semejanzas y diferencias entre dos eventos mutuamente excluyentes y dos eventos complementarios.

2. Resuelve el siguiente problema aplicando por lo menos dos procedimientos diferentes; después explícalos.

El producto de dos números enteros consecutivos es 14 762. ¿Cuáles son dichos números?

Procedimiento 1	**Procedimiento 2**

¿Cuántas soluciones hay para este problema?

3. Analiza y determina las relaciones de proporcionalidad que se presentan entre las variables a (aceleración), v (velocidad) y t (tiempo) en la fórmula de la aceleración:

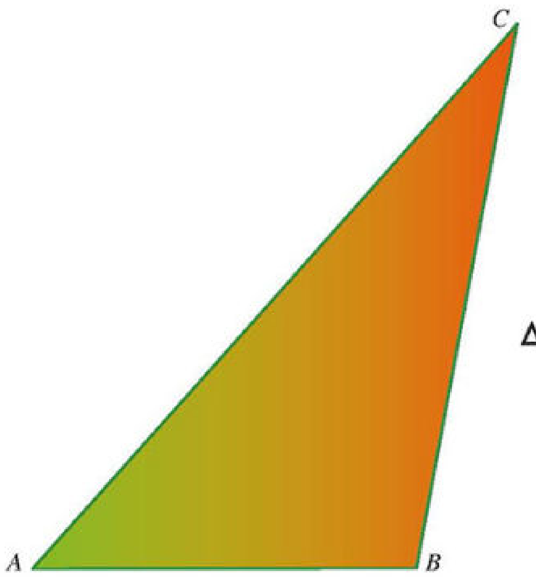
$$a = \frac{v}{t}$$

   a) ¿Qué variables son directamente proporcionales?

   b) ¿Qué variables son inversamente proporcionales?

Justifica cada una de tus respuestas.

4. Selecciona un punto M sobre el lado $\overline{CA}$ del triángulo $\triangle ABC$; por M traza una recta paralela al lado $\overline{AB}$, que interseque al lado $\overline{BC}$ en el punto N. Usa dos criterios para la semejanza de triángulos y justifica la semejanza de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle MNC$.



$\Delta ABC \cong \Delta MNC$

Utiliza este código para valorar lo que aprendiste en este bloque sobre la resolución de ecuaciones cuadráticas.

Marca el círculo que contenga la respuesta correcta a cada cuestión. En tu cuaderno escribe los razonamientos y procedimientos que hayas seguido para obtener dicha respuesta.

1. Cuestionario que sirve para realizar estudios estadísticos.
   - ◯ Pregunta
   - ◯ Encuesta
   - ◯ Plática
   - ◯ Entrevista
2. Los eventos A y B son complementarios si son mutuamente excluyentes y...
   - ◯ tienen un elemento común.
   - ◯ son iguales.
   - ◯ tienen los mismos elementos.
   - ◯ entre los dos completan el espacio muestral.
3. Es un criterio para establecer la semejanza de triángulos.
   - ◯ Tres lados iguales
   - ◯ Un ángulo igual
   - ◯ Dos ángulos iguales
   - ◯ Dos lados iguales
4. Reciben este nombre los eventos que no tienen un resultado posible en común.
   - ◯ Independientes
   - ◯ Mutuamente excluyentes
   - ◯ Complementarios
   - ◯ Iguales
5. La solución de $3x^2 = 168.75$ es:

   ◯ 75 ◯ 7.5 ◯ 750 ◯ 0.75
6. Es una relación de variación cuadrática:

   ◯ $y = x + 6^2$ ◯ $y = -4x^2$ ◯ $y = 2x + 7$ ◯ $y = 7^2$
7. Dos cuadrados son semejantes…
   - ◯ siempre.
   - ◯ a veces.
   - ◯ nunca.
   - ◯ si tienen ángulos iguales.
8. Los eventos A y B son independientes siempre y cuando…
   - ◯ tengan un elemento común.
   - ◯ sean iguales.
   - ◯ sean diferentes.
   - ◯ no se afecten entre sí.

BLOQUE DOS

Flor Abstracta. Diseño abstracto de una flor aislada, donde se observa cómo en cada pétalo se repiten las distintas estructuras geométricas que lo conforman, creando así un fractal.

Ejes temáticos

- Sentido numérico y pensamiento algebraico
- Forma, espacio y medida
- Manejo de la información

Aprendizajes esperados

- Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan.
- Resuelve problemas que impliquen el uso del teorema de Pitágoras.

Competencias

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas eficientemente

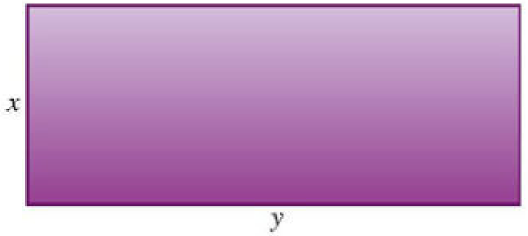
Patrones y ecuaciones

Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización

ACTIVIDADES INICIALES

Zoclo y losetas

En la escuela de Roberto y Estela arreglaron los pisos y el zoclo de los salones de clase. La siguiente figura representa las dimensiones desconocidas del salón de ambos jóvenes. Ellos saben que se ocuparon 32 m de zoclo y 63 m² de losetas. ¿Cuáles son las medidas de los lados del rectángulo que representa el salón de clases?



Resuelvan el problema de Roberto y Estela, y expliquen el procedimiento aplicado.

Soliciten al profesor que valide sus respuestas y procedimientos.

En otro salón se ocuparon 36 m de zoclo y 80 m² de losetas.

¿Cuáles son las dimensiones de ese salón?

¿Qué representa la ecuación $2x + 2y = 36$?

¿Y las ecuaciones $x + y = 18$, $y = 18 - x$?

¿Cómo se puede justificar la ecuación $x(18 - x) = 80$?

La ecuación cuadrática que se tiene que resolver es:

$$x^2 - 18x + 80 = 0$$

¿Por qué se puede transformar en la ecuación $(x - 8)(x - 10) = 0$?

¿Cuáles son las soluciones o raíces de la ecuación cuadrática?

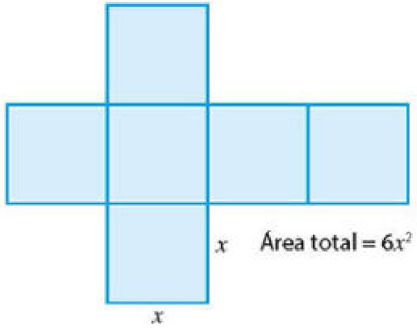
¿Cómo se pueden calcular las raíces de ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + c = 0$?

Soledad y Jaime analizan y resuelven el siguiente problema:

Glosario

superficie total. Es la suma de las áreas de todas las caras de un sólido geométrico.

¿Cuánto miden las aristas de un cubo cuya **superficie total** es de 294 cm²?



¿Cuál es la ecuación que modela la situación planteada?

Analicen y justifiquen los dos procedimientos posibles para calcular las raíces de la ecuación cuadrática $6x^2 = 294$.

$$\begin{aligned} 6x^2 &= 294 \\ x^2 &= 49 \\ x &= \pm\sqrt{49} \\ x_1 = 7 \quad & x_2 = -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6x^2 &= 294 \\ x^2 &= 49 \\ x^2 - 49 &= 0 \\ (x + 7)(x - 7) &= 0 \\ x - 7 = 0; &\quad x_1 = 7 \\ x + 7 = 0; &\quad x_2 = -7 \end{aligned}$$

¿Cuál de las dos raíces sirve para obtener la solución del problema planteado?

Expliquen el uso de la siguiente propiedad en la solución de ecuaciones cuadráticas.

> Cuando el producto de dos números p y q es igual a cero, se puede afirmar que uno de los dos números es cero, o bien que los dos son cero.

Generalizo

Las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + c = 0$ se pueden obtener así:

$$\begin{aligned} ax^2 &= -c \\ x^2 &= -\frac{c}{a} \\ x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \quad & x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ax^2 + c &= 0 \\ x^2 + \frac{c}{a} &= 0 \\ \left(x + \sqrt{-\frac{c}{a}}\right)\left(x - \sqrt{-\frac{c}{a}}\right) &= 0 \\ x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \quad & x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \end{aligned}$$

¿Se puede aplicar la factorización para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx = 0$?

Irma y Javier desean obtener las fórmulas para calcular las raíces de ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx = 0$. Para lo cual plantearon y resolvieron el siguiente problema.

¿Cuántos números conoces que cumplan la condición de ser iguales a su cuadrado?

Este problema se puede resolver mediante dos procedimientos básicos:

Si $x = 0$, entonces $x^2 = 0$.
Una solución al problema planteado es $x_1 = 0$.
Si $x \neq 0$, entonces:

$$x^2 = x$$
$$\frac{x^2}{x} = \frac{x}{x}$$
$$x = 1$$

La otra solución al problema es $x_2 = 1$.

Aplicando la **factorización**

$$x^2 = x$$
$$x^2 - x = 0$$
$$x(x - 1) = 0$$

$x = 0$ $\qquad$ $x - 1 = 0$

$x_1 = 0$ $\qquad$ $x_2 = 1$

Glosario

cuádruple (de un número). Es cuatro veces el mismo número.

factorización. Proceso que permite escribir una expresión matemática como el producto de dos o más factores.

quíntuplo (de un número). Es cinco veces el mismo número.

Realicen lo que se pide en cada caso.

1. Comparen los dos procedimientos usados para resolver la ecuación cuadrática $x^2 = x$ y determinen las semejanzas y diferencias entre ellos.
2. El **cuádruple** del cuadrado de un número es igual al **quíntuplo** del mismo número. ¿De qué número se trata?
3. Calculen las raíces de las ecuaciones cuadráticas y comprueben sus respuestas.

a) $3x^2 + 21x = 0$ $\qquad$ c) $-12x^2 = 156x$

b) $8x^2 - 96x = 0$ $\qquad$ d) $-7x^2 = -84x$

Justifico

Las ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx = 0$, siempre tienen una raíz $x_1 = 0$, la otra raíz se obtiene haciendo:

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = -\frac{b}{a}$$

¿Cómo se justifica la afirmación anterior?
¿De qué manera se puede comprobar que las raíces son x_1 y x_2?

Solución de problemas con ecuaciones cuadráticas completas

Susana y Fausto utilizan ecuaciones cuadráticas para modelar problemas y las resuelven usando factorización. Por ejemplo, a una reunión organizada por Susana asistieron varias personas. Fausto se dio cuenta de que todas se saludaron entre sí y de que el total de apretones de manos fue 55. ¿Cuántas personas hubo en la reunión? Si n se usa para representar al número de personas asistentes, ¿cuál sería la ecuación cuadrática adecuada para modelar la situación planteada?

Completen lo que falta en el siguiente procedimiento.

$$\frac{n(n-1)}{\boxed{}} = 55 \qquad n^2 - n = 110$$
$$n^2 - n - 110 = 0$$

La ecuación cuadrática obtenida es un **trinomio**. ¿Cómo se factorizan este tipo de expresiones?

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$
$$ab = -110 \qquad a + b = -1$$

Glosario

trinomio. Expresión algebraica formada por la suma o resta de tres términos.

Es decir, los números a y b de la factorización, deben cumplir la condición de que al sumarlos se obtenga el término lineal, y al multiplicarlos el término independiente.

¿Cuáles son los valores adecuados para a y b?, en el problema planteado.

El producto $(n - 11)(n + 10) = 0$, corresponde a la factorización de la ecuación cuadrática $n^2 - n - 110 = 0$, por lo tanto sus raíces son:

$$n_1 - 11 = 0 \qquad n_2 + 10 = 0$$
$$n_1 = 11 \qquad n_2 = -10$$

¿Qué raíz se usa para resolver el problema planteado?

Usa ecuaciones cuadráticas para resolver los siguientes problemas.

1. La suma de los cuadrados de dos números consecutivos es igual a 145. ¿Cuáles son esos números?
2. Si el perímetro de un rectángulo mide 36 cm y el área 80 cm², ¿cuáles son sus dimensiones?

Fausto y Susana aplican la factorización de trinomios para obtener las raíces de una ecuación cuadrática y así resolver un problema clásico, que dice lo siguiente:

"Regocíjanse los monos divididos en dos bandos, su octava parte al cuadrado en el bosque se solaza. Con alegres gritos, doce atronando el campo están. ¿Sabes cuántos monos hay en total en la manada?"

Aplico

Procedimiento para resolver problemas usando ecuaciones cuadráticas:

1. Leer el enunciado para comprender el problema y determinar los datos conocidos, así como la cantidad desconocida o incógnita.
2. Determinar las relaciones entre los datos y la incógnita para modelar la situación mediante una ecuación cuadrática.
3. Calcular las raíces o soluciones de la ecuación.
4. Analizar si las raíces cumplen con las condiciones del problema y describir la solución.
5. Comprobar si la solución es correcta.

Completa lo que haga falta en cada uno de los pasos que siguieron Susana y Fausto para resolver el problema referente a los monos.

1. Comprensión del problema
   a) Cantidad desconocida:
   b) Cantidades conocidas:
2. Modelar la situación
   a) La cantidad total de monos es x
   b) ¿Qué significan $\frac{x}{8}$ y $\left(\frac{x}{8}\right)^2$?
   c) 12 es un dato conocido
   d) ¿Cuál es la ecuación cuadrática que modela la situación? $x = (\quad)^2 + 12$
3. ¿Cómo se obtiene la ecuación cuadrática $x^2 - 64x + 768 = 0$?, ¿cómo se resuelve?
4. ¿Las dos raíces obtenidas pueden ser solución del problema?, ¿por qué?
5. ¿Cómo se puede comprobar la solución obtenida?

Método de completar el cuadrado para resolver ecuaciones cuadráticas

Socorro y Joel requieren de otro procedimiento para resolver ecuaciones cuadráticas. Analicemos lo que hacen para resolver el siguiente problema.

La base mayor de un trapecio mide 10 m, la altura y la base menor son iguales y el área del trapecio es de 32.625 cm². ¿Cuál es la longitud de la base menor?

¿Cómo se puede justificar que la ecuación cuadrática que modela el problema es la siguiente?

$$\frac{(10 + x)x}{2} = 32.625 \qquad x^2 + 10x = 65.25$$

Comprendo

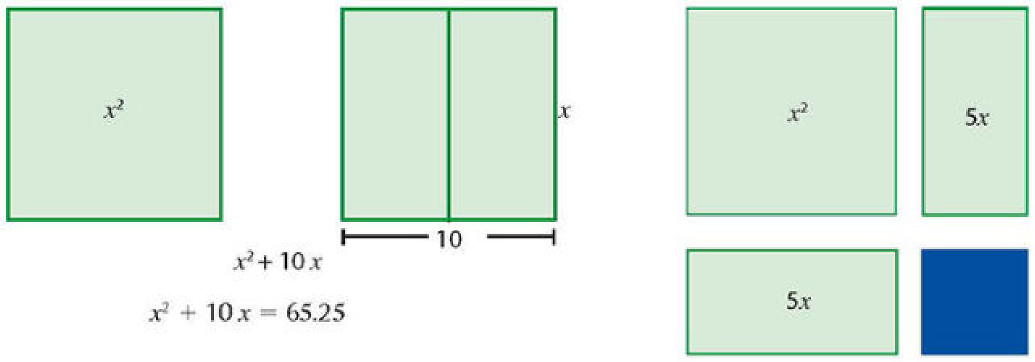
Factorización de un trinomio cuadrado perfecto. Se obtienen las raíces de los términos elevados al cuadrado, y se expresan como un **binomio** al cuadrado.

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)(x + a)$$
$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

Glosario

binomio. Expresión algebraica formada por la suma o resta de dos términos.

¿Cómo se puede completar el lado izquierdo de la ecuación cuadrática correspondiente al trapecio, para obtener un trinomio cuadrado perfecto?



$x^2 + 10x$

$x^2 + 10x = 65.25$

$x^2 + 10x + 5^2$

¿Qué se obtiene si a la ecuación se le suma $5^2 = 25$ en ambos miembros?

$$x^2 + 10x = 65.25 \qquad x^2 + 10x + 25 = 90.25$$

De este modo se consigue un trinomio cuadrado perfecto y se factoriza como tal.

$$(x + 5)^2 = 90.25$$

¿Cómo se resuelve esta ecuación?

$$x + 5 = \pm\sqrt{90.25}$$
$$x = -5 \pm \sqrt{90.25}$$

$$x_1 = -5 + 9.5 \qquad x_2 = -5 - 9.5$$
$$x_1 = 4.5 \qquad x_2 = -14.5$$

¿Cuál es la solución del problema?

¿Cómo se puede comprobar?

Glosario

recíproco (de un número *x*). Es un número $\frac{1}{x}$ que cumple con la propiedad: $(x)\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

Utilicen la factorización de un trinomio cuadrado perfecto para resolver los siguientes problemas.

1. Si la suma de un número con su **recíproco** es igual a 2, ¿de qué número se trata?
2. Un grupo de alumnos pagarán $6000.00 por la renta de un autobús para ir de excursión. Como 10 posibles asistentes declinaron, ahora cada estudiante tendrá que pagar $20.00 más. ¿Cuántos alumnos fueron a la excursión y cuál fue la cantidad total que cada uno pagó?
3. La suma de dos números es 34 y su producto es 285. ¿Cuáles son dichos números?
4. La base de un rectángulo mide el doble que su altura. Cuando la altura se incrementa 6 m y la base 40 m, se obtiene un rectángulo con un área igual al doble del área del primero. ¿Cuáles son las dimensiones de los dos rectángulos?
5. Raúl tardó cierto tiempo para ir de *A* a *B*, recorriendo 360 km. Consideró que de regreso tendría que aumentar la rapidez en 30 km/h para tardar 2 horas menos. ¿Cuánto tiempo tardó Raúl en la ida y cuánto en el regreso? Considera la siguiente ecuación para saberlo.

$$\frac{360}{t} + 30 = \frac{360}{t-2}$$

6. Calculen las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 - 22x = -121$, y justifiquen la afirmación: las raíces x_1 y x_2 de una ecuación de segundo grado pueden ser iguales.
7. Resuelvan la ecuación cuadrática $x^2 - 4x - 21 = 0$, y justifiquen la afirmación: Las raíces x_1 y x_2 de una ecuación de segundo grado pueden ser diferentes.
8. ¿Cuáles son las raíces de la ecuación $x^2 + 9 = 0$? ¿Qué se puede afirmar en este caso?

EVALUACIÓN FORMATIVA

Resuelve cada una de las situaciones que se plantean a continuación.

1. Un tinaco se puede vaciar en 2 horas cuando se abren simultáneamente dos llaves. Cuando éstas se usan una por una, el tinaco se vacía con una de ellas en 3 horas menos que con la otra. ¿Cuánto tiempo requiere cada una de las llaves para vaciar el tinaco?

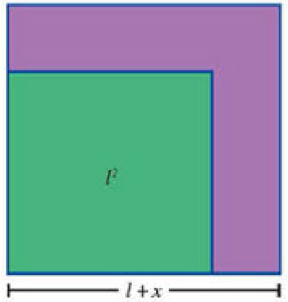
   Justifica que la ecuación que modela esta situación es la siguiente:

$$t^2 - t - 6 = 0$$

2. Calcula las raíces de las ecuaciones cuadráticas y comprueba tus respuestas.

   a) $-3x^2 + 20 = 0$
   b) $-8x - 15x^2 = 0$
   c) $(x - 5)^2 = 121$
   d) $x^2 + 12x - 169 = 0$

3. ¿En cuánto se debe incrementar la longitud de los lados de un cuadrado para obtener otro cuadrado con el doble de área?



Comunico

Redacta un escrito para justificar la siguiente afirmación: "Las ecuaciones cuadráticas pueden tener dos raíces distintas, una raíz doble (las que se repiten) o raíces que no se pueden calcular". Incluye una situación problemática que lo ejemplifique.

Habilidades digitales

Para que practiques el método de factorización, lleva a cabo una búsqueda en internet. Puedes iniciar tu búsqueda ingresando a la siguiente dirección electrónica:
http://didactalia.net/comunidad/materialeducativo/recurso/factorizacion-de-polinomios-matematicas-4-secundar/149a8887-d2d2-40c1-9453-5d11be2a7854
(Consulta: 11 de agosto de 2014).
Estudia la presentación y resuelve los ejercicios y la autoevaluación.

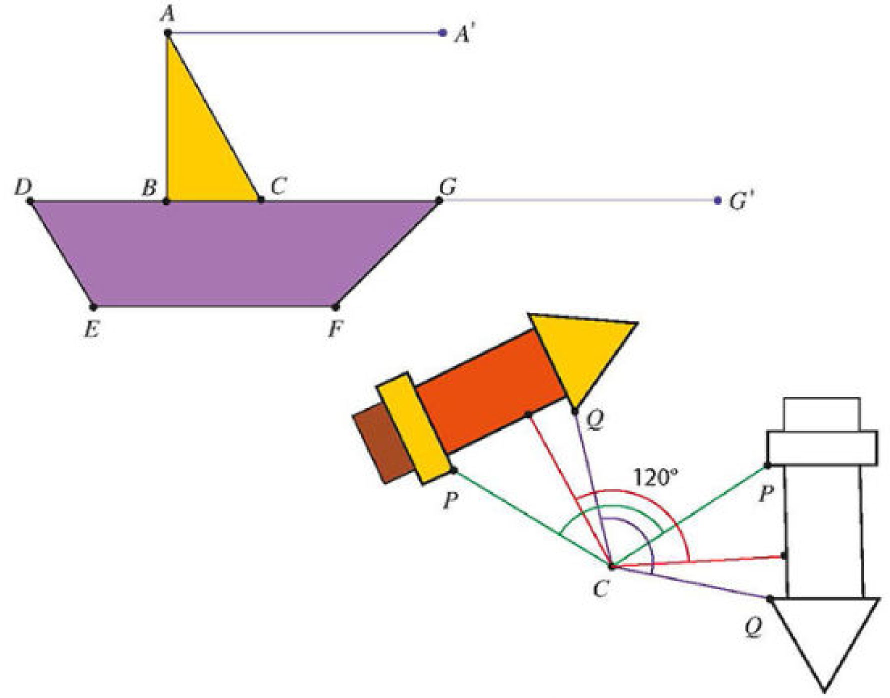
Figuras y cuerpos

Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras

ACTIVIDADES INICIALES

Juguetes en movimiento

Belinda y Omar trazan figuras geométricas para representar los movimientos que realizan dos juguetes que usaban cuando eran niños.



Analiza los movimientos del barco y del cohete arriba ilustrados, y realiza lo que se solicita a continuación.

1. Describe los movimientos del barco y el cohete.
2. Describe el procedimiento empleado para obtener los puntos A' y G' de la nueva posición del barco.
3. Traza en tu cuaderno las dos posiciones del barco y describe la **transformación geométrica** aplicada a las figuras que forman el barco en la posición inicial.
4. Después describe y traza las dos posiciones del cohete. ¿Qué tipo de transformación geométrica se aplicó en este caso?

Glosario

transformación geométrica. Modificación de la posición de una figura geométrica.

¿Qué se requiere para aplicar una traslación a una figura geométrica?

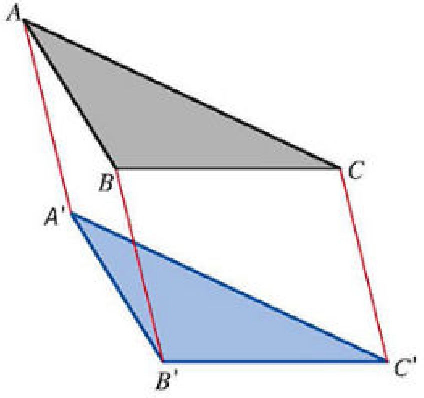
Celia y Pedro han investigado acerca de la **traslación** de figuras geométricas; ahora saben que estas traslaciones se caracterizan por una dirección y por la magnitud del movimiento.

La flecha en la semirrecta $\overrightarrow{TT'}$ indica la dirección de una traslación, mientras que la longitud del segmento $\overline{TT'}$, señala la magnitud de la misma.

Para obtener la traslación de una figura, se desplazan sus puntos principales y se traza la figura.

Glosario

traslación (de figuras). Transformación geométrica de una figura en la que todos los puntos se desplazan a la misma distancia y en la misma dirección.

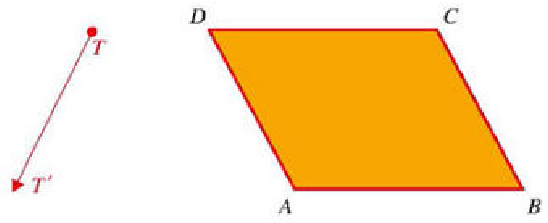


Analicen y completen el procedimiento anterior.

1. ¿Cómo queda la imagen del punto A, cuando se le aplica una traslación?
2. ¿Cuál es el procedimiento para trasladar una figura geométrica como el triángulo $\triangle ABC$?
3. ¿Qué relaciones hay entre los segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ con la semirrecta $\overline{TT'}$?

Aplico

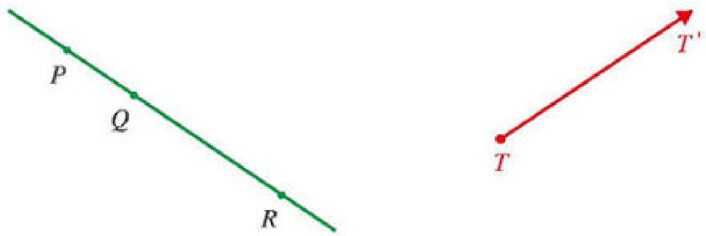
Emplea el procedimiento anterior para trazar la imagen del romboide $ABCD$ cuando se aplica la traslación indicada por la flecha $\overline{TT'}$.

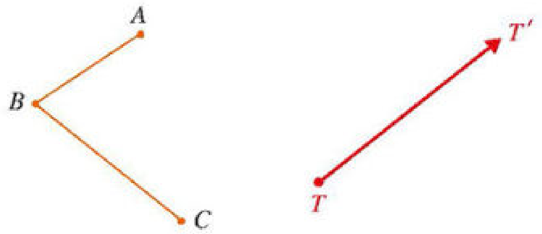


Propiedades de la traslación de figuras geométricas

Para que conozcan las propiedades de la traslación, realicen las que se indican enseguida. Analicen y comparen la figura original con la obtenida mediante la traslación. Describan la propiedad de la traslación que se presenta en cada caso.

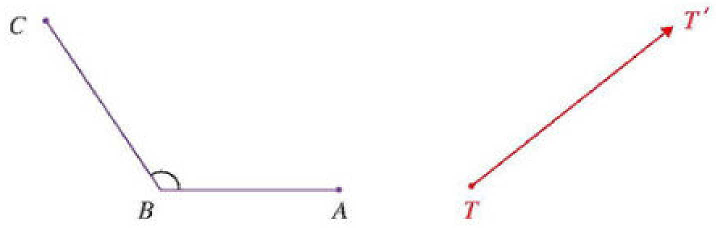
1. ¿Qué sucede con tres puntos colineales P, Q y R cuando se aplica una traslación $\overline{TT'}$?

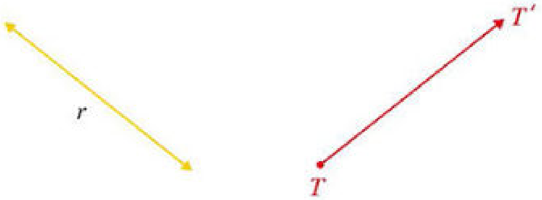




2. ¿Qué se puede afirmar de las magnitudes de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ si se lleva a cabo una traslación TT'?

3. ¿Se puede afirmar que una traslación TT' conserva las magnitudes de los ángulos originales?, ¿por qué?



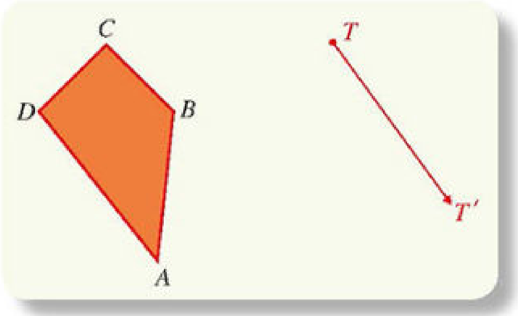


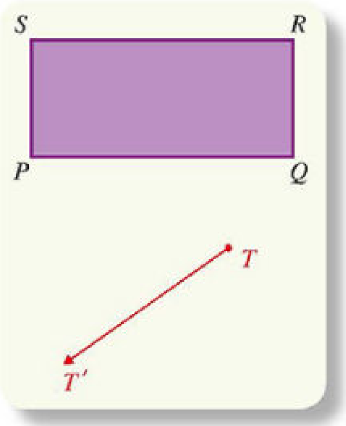
4. ¿Cuál es el resultado de trasladar una recta r?

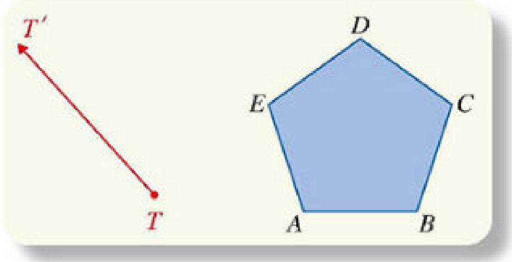
Comunico

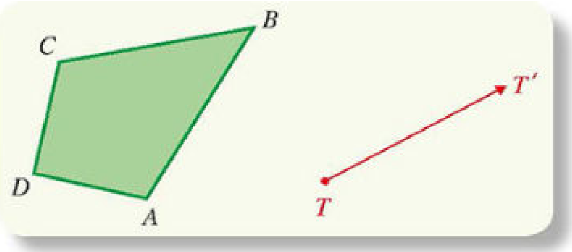
Elabora un tríptico para describir las propiedades de la traslación. Preséntalo a tu profesor para que lo valide y compártelo con tus compañeros.

Tracen las traslaciones de las figuras de los recuadros y verifiquen que se cumplan las propiedades de una traslación geométrica.



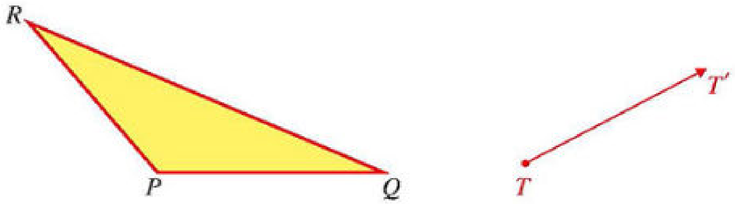






Realiza lo que se indica en cada punto.

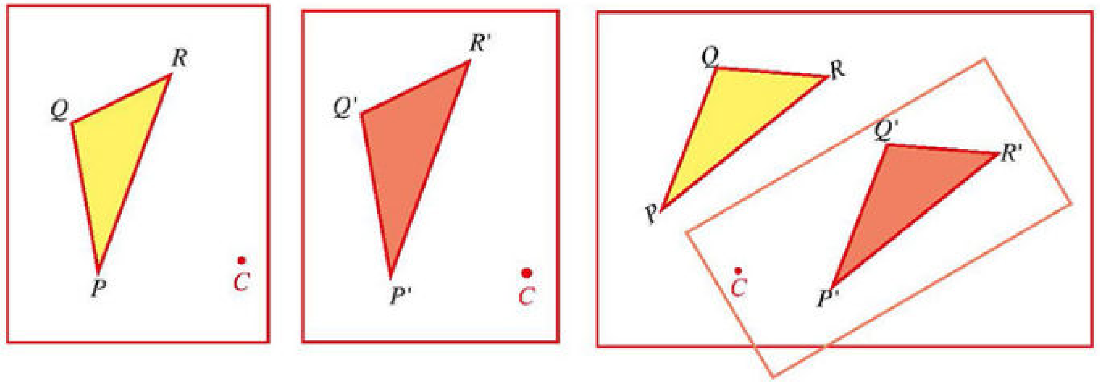
1. Traza dos triángulos congruentes con el $\triangle PQR$, uno en tu cuaderno y otro en un pedazo de cartulina.
2. Recorta el triángulo trazado en la cartulina.
3. Traslada en tu cuaderno el triángulo $\triangle PQR$ de acuerdo con la dirección $\overrightarrow{TT'}$,



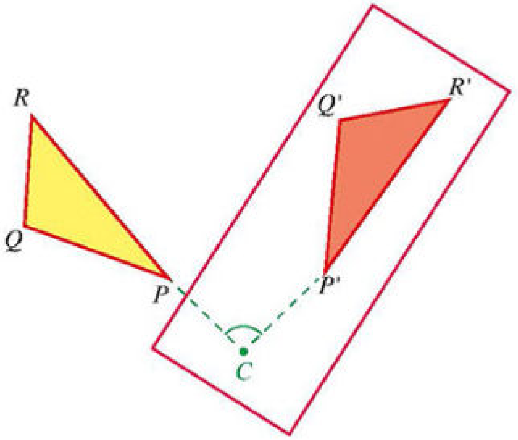
4. Utiliza el triángulo de cartulina para verificar si la traslación geométrica conserva la forma y el tamaño de las figuras.
5. Redacta un texto sobre las razones por las cuales se puede afirmar que la traslación geométrica es una transformación rígida. Preséntalo a tu profesor para que lo revise y valide tu explicación.

Rotación de figuras geométricas

Elena y Sebastián te sugieren analizar qué sucede con el procedimiento presentado en las ilustraciones y después aplica el mismo procedimiento con otras figuras.



1. Trazar un $\triangle PQR$ y un punto C.
2. Hacer los mismos trazos en papel semitrasparente.
3. Fijar el punto C y girar el papel semitransparente.



4. Reproducir en la primera hoja de papel la nueva posición del $\triangle PQR$, así como el ángulo $\measuredangle PCP'$.
5. Describir el proceso y señalar la importancia del punto C y del ángulo $\measuredangle PCP'$.

Analicen el procedimiento y realicen lo que se solicita en cada caso.

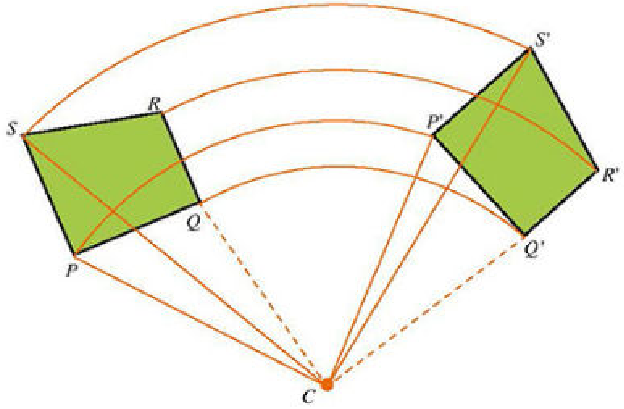
1. Apliquen el procedimiento de Elena y Sebastián a otras figuras, usando un punto C y un ángulo $\sphericalangle PCP'$ diferente.
2. Analicen y expliquen la siguiente definición:

Rotación de una figura geométrica es la transformación geométrica que sufre la figura cuando todos sus puntos giran el mismo ángulo alrededor de un punto.

Pienso

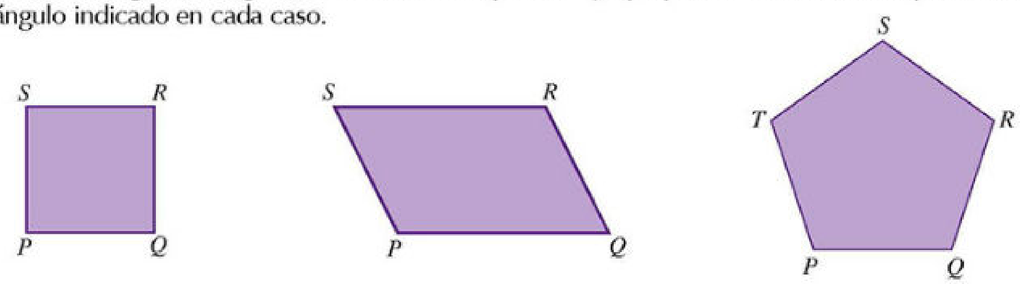
La rotación de una figura geométrica es la transformación geométrica que mueve cada punto P de la figura en un punto P', de tal manera que se cumplen estas condiciones:

1. $\overline{PC} = \overline{P'C}$, $\overline{QC} = \overline{Q'C}$, $\overline{RC} = \overline{R'C}$...
2. Para todos los puntos de la figura: $\measuredangle PCP' = \measuredangle QCQ' = \measuredangle RCR' = ...$
3. C es el centro de rotación.
4. $\measuredangle PCP'$ es el ángulo de rotación.



Para que comprendan y apliquen la rotación de figuras geométricas, analicen cada uno de los enunciados anteriores y después realicen lo que se solicita.

1. Expliquen el uso del compás para la rotación de figuras.
2. ¿Cómo se aplica la definición de rotación a los giros hechos con los triángulos de la página anterior?
3. Tracen las siguientes figuras, seleccionen un punto C y apliquen la rotación correspondiente al ángulo indicado en cada caso.



$\measuredangle PCP' = 65°$ $\measuredangle PCP' = 120°$ $\measuredangle PCP' = 270°$

Con el propósito de que fortalezcan sus conocimientos acerca de las transformaciones geométricas, estudien el tema “Mueve figuras” en el libro *Apuntes de matemáticas* de Carmen Burgués, Roser Codina y Manuel Montanuy. El cual pueden encontrar en su Biblioteca de Aula o Escolar (Libros del Rincón).

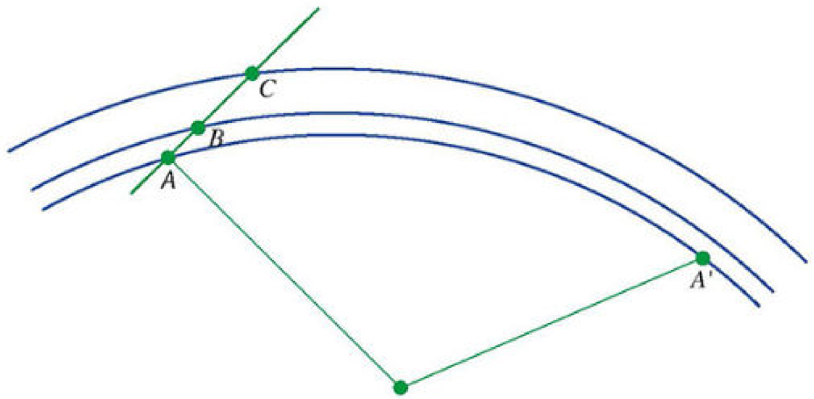
Bloque DOS

¿Cuáles son las propiedades de una rotación de figuras geométricas?

Glosario

puntos colineales. Son puntos que se ubican en la misma recta.

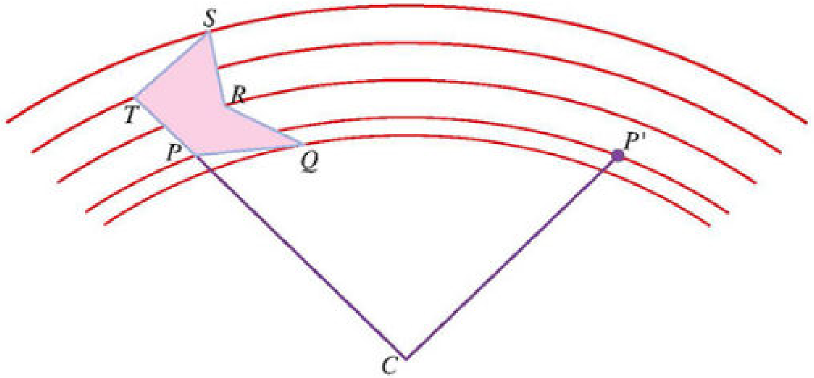
Serafín y Magdalena completaron la figura que se muestra para verificar que la rotación es una transformación geométrica que cumple con la siguiente propiedad: transforma **puntos colineales** A, B y C, en puntos colineales A', B' y C' respectivamente.



Reproduce la figura de Magdalena y Serafín; complétala y verifica que la rotación es una transformación geométrica que conserva la colinealidad de los puntos en las figuras transformadas.

Tracen la siguiente figura, complétenla y verifiquen que cumpla con las propiedades de la rotación de figuras geométricas:

1. Conservación de distancias
2. Conservación de ángulos
3. Obtención de una nueva figura con la misma forma y tamaño

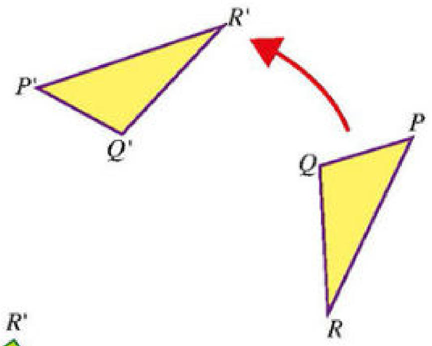


4. Expliquen en un escrito por qué se afirma que la rotación de figuras es una transformación rígida.

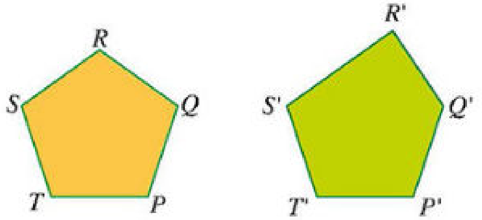
Lee con atención cada enunciado y realiza lo que se solicita.

1. Si el triángulo $\triangle P'Q'R'$ se obtuvo mediante una rotación del $\triangle PQR$…

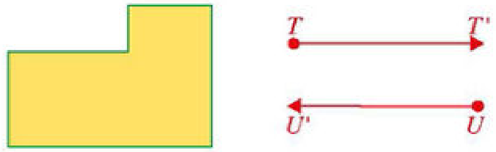
   a) ¿Cómo se puede obtener el centro de rotación?
   b) ¿Cuál es la magnitud de la rotación?



2. Corrige el error cometido en la siguiente traslación de la figura $PQRST$.



3. ¿Cuál es el resultado final que se obtiene después de aplicar las traslaciones $\overline{TT'}$ y $\overline{UU'}$? Justifica tu respuesta.



Comunico

En un texto, define y ejemplifica los siguientes conceptos:

a) Rotación de figuras geométricas
b) Centro de rotación
c) Ángulo de rotación o magnitud de la rotación
d) Imagen de una figura a la que se le ha aplicado una rotación

Habilidades digitales

Para que conozcas más acerca de los movimientos geométricos, realiza una búsqueda en internet; puedes comenzar ingresando a la siguiente dirección electrónica.
www.educacionplastica.net/movimien.htm
(Consulta: 12 de enero 2015).
Compara la información obtenida con la que ya conoces y escribe tus conclusiones al respecto.

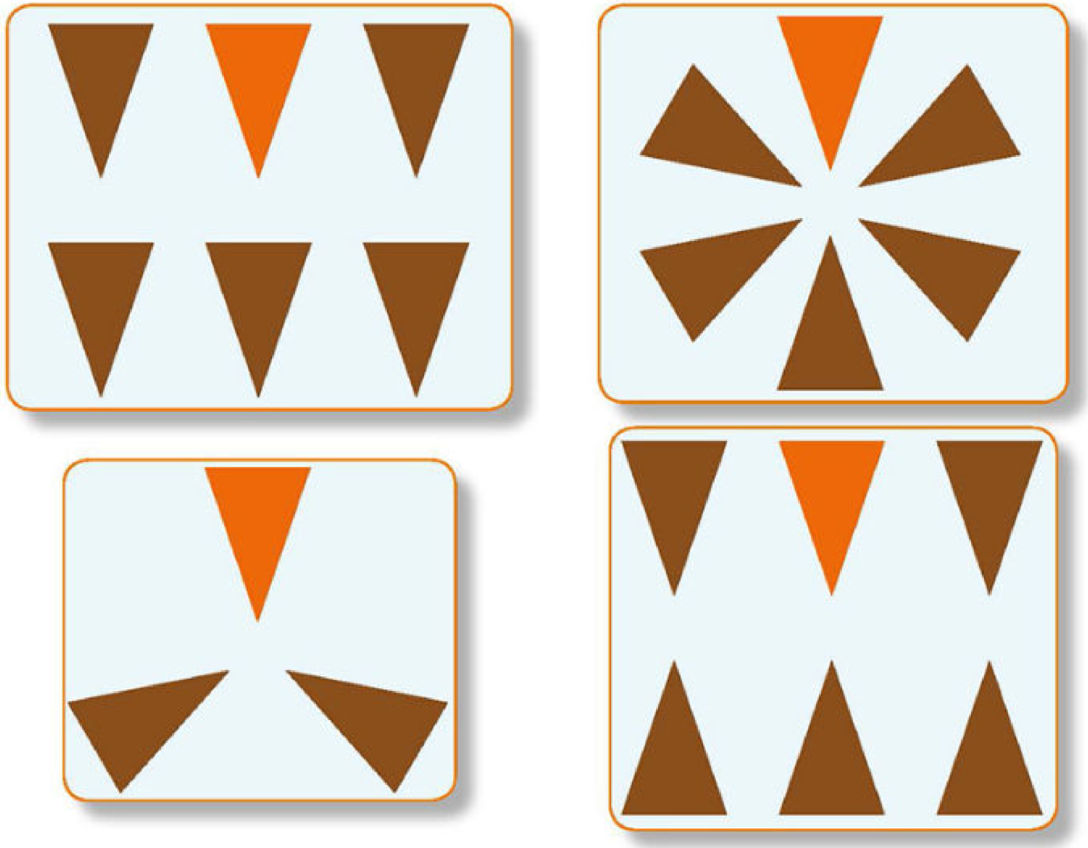
Figuras y cuerpos

Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras

ACTIVIDADES INICIALES

Diseños geométricos

Federico y Nora aplican sus conocimientos sobre transformaciones de figuras geométricas para construir diseños. En este caso, usan un triángulo isósceles al que se le puede aplicar una o varias transformaciones geométricas.



Reproduzcan los cuatro diseños de Nora y Federico, comenzando en cada caso con el triángulo de color naranja.

Expliquen cada uno de los procedimientos seguidos y expónganlos ante el grupo.

Para que conozcan algunas aplicaciones del diseño geométrico en la construcción, consulten el tema "Geometría y arquitectura" en el libro *Geometría y el mundo* de José Antonio De la Peña. Redacten un escrito en el que describan el uso de patrones geométricos en la arquitectura.

Diseños que combinan la simetría axial y central

Realiza lo que se indica en cada caso y explica el procedimiento seguido.

a) Obtener diseños aplicando **simetría axial.**

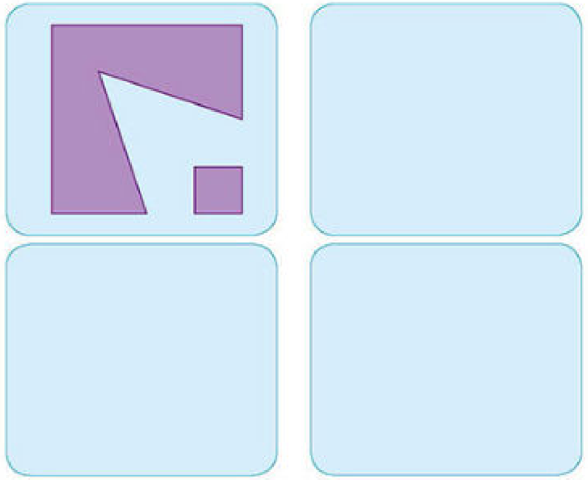
b) Obtener diseños aplicando **simetría central.**

Glosario

simetría axial. Transformación geométrica de una figura usando un eje de simetría.

simetría central. Transformación geométrica de una figura usando un centro de simetría.

Apliquen la simetría axial y central a las figuras del primer recuadro con el fin de diseñar un mantel para una mesa cuadrada.



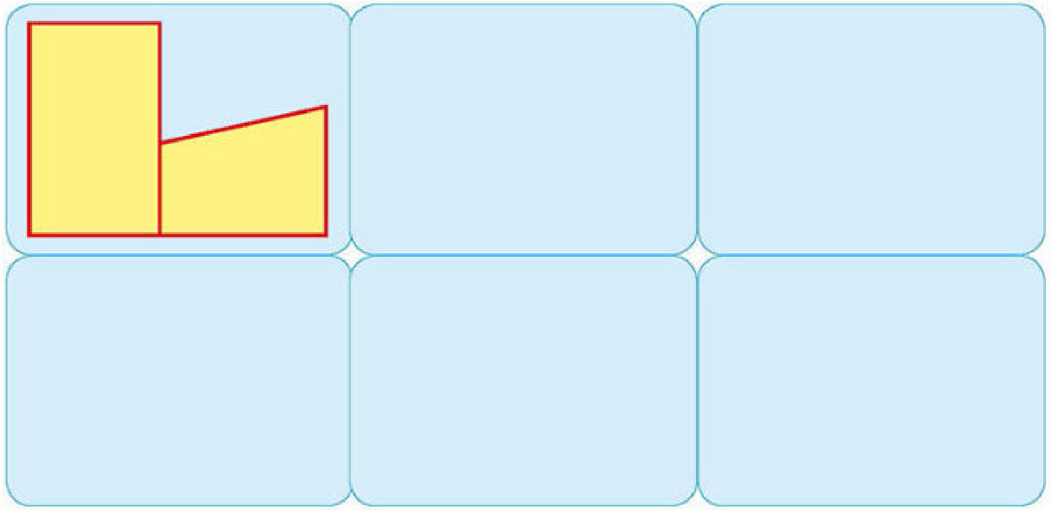
Comunico

Redacta un texto en el que describas los procedimientos y las características de la simetría axial y central que usaste. Preséntalo al profesor para su validación.

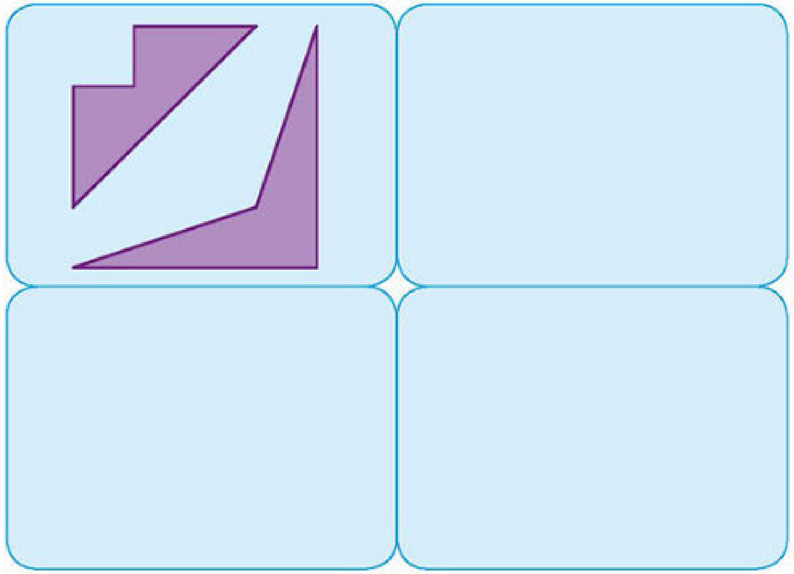
Diseños que combinan la simetría axial y la traslación

Recuerda lo que sabes sobre traslación de figuras geométricas y realiza lo que se indica.

a) Obtén diseños aplicando la traslación.



Usen la simetría axial y la traslación para completar el diseño de una figura hecha con mosaicos.



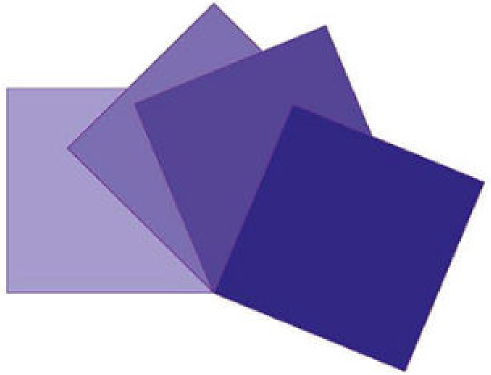
Comunico

Describe los elementos de la simetría axial y de la traslación que aplicaste. De ser posible realiza una presentación con diapositivas para mostrar tus resultados.

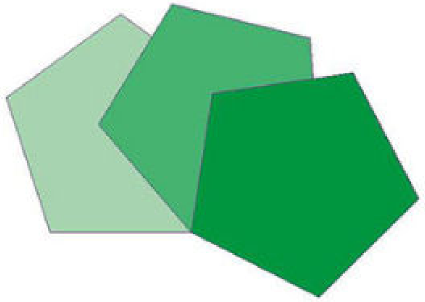
Diseños que combinan la simetría axial y la rotación

Con base en tus conocimientos sobre rotación de figuras geométricas lleva a cabo lo que se indica a continuación.

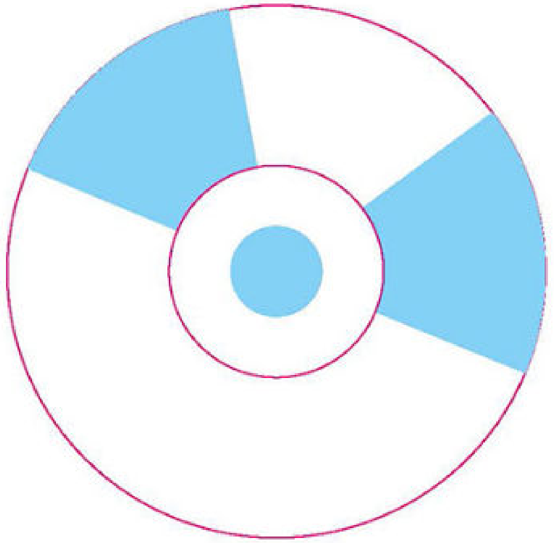
a) Completa una rosa cuadrada.



b) Completa una rosa pentagonal.



Construyan y completen el siguiente diseño combinando simetría axial y rotación.

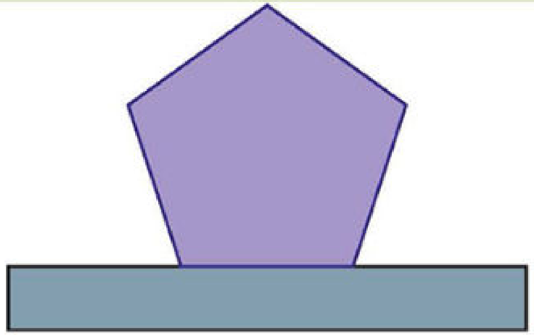


Describan, paso a paso, los procedimientos que siguieron para realizar el diseño.

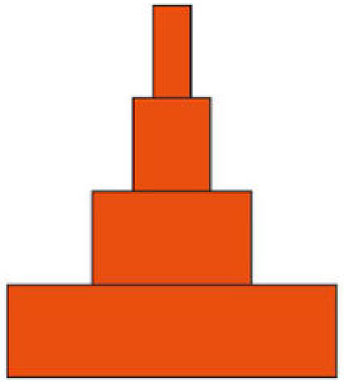
Diseños que combinan la simetría central y la traslación

Aplicando tus conocimientos sobre simetría central y traslación, haz lo que se solicita en cada caso.

1. Elabora el siguiente diseño aplicando primero simetría central y después la traslación.



2. Ahora aplica primero la traslación y después la simetría central para realizar el diseño.

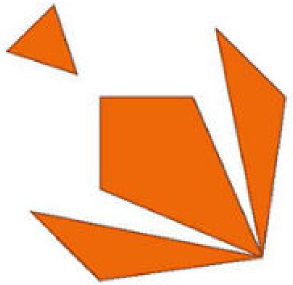


Analicen sus diseños y describan los principales elementos que aplicaron de la simetría central y de la traslación.

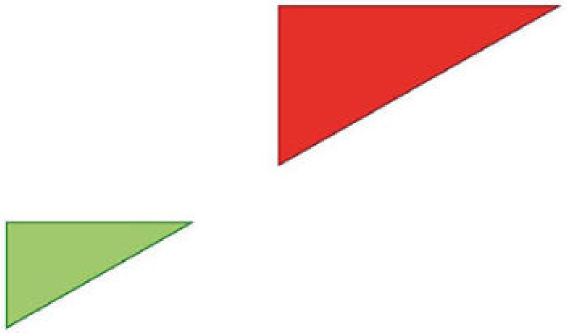
Diseños que combinan la simetría central y la rotación

Emplea tus conocimientos sobre simetría central y sobre rotación para construir los siguientes diseños geométricos.

1. Termina de elaborar el diseño, utilizando la simetría central y la rotación.



2. Empleando la simetría central y la rotación realiza un diseño geométrico con las siguientes figuras.

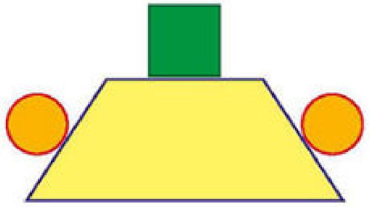


Expliquen en un texto los procedimientos seguidos y preséntenlo al profesor para que lo valide.

Diseños que combinan la traslación y la rotación

Aplica las propiedades de la traslación y la rotación en las siguientes actividades.

1. ¿Cuántos diseños diferentes puedes obtener recurriendo a la traslación y la rotación, a partir de la siguiente figura?



2. Empleando la rotación y la traslación realiza un diseño geométrico que cubra todo el recuadro.

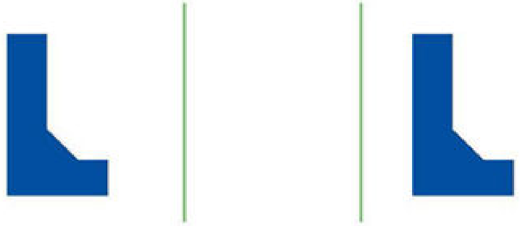
Detallen los procedimientos aplicados y presenten su descripción al profesor.

Con los diseños geométricos elaboren un logo para que lo incluyan en un cartel sobre "Prevención de adicciones".

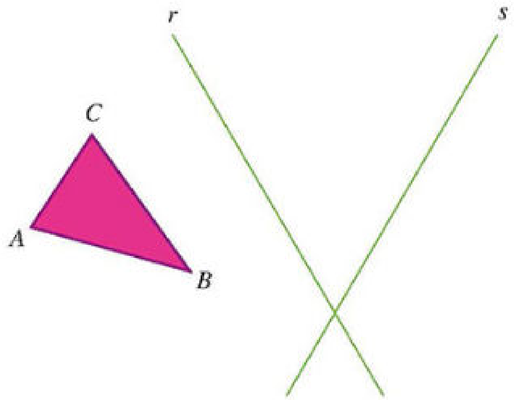
Analiza las situaciones y realiza lo que se solicita en cada caso.

1. ¿Cómo se puede construir un pentágono a partir de la rotación sucesiva de un segmento $\overline{AB}$?

2. Completa la siguiente figura para que expliques la afirmación: "Una traslación puede sustituirse por la aplicación sucesiva de la simetría axial".



3. Aplica la simetría axial, primero con la recta r; a la figura obtenida aplícale nuevamente simetría axial pero ahora a partir de la recta s.



¿Es posible obtener la última figura mediante una sola transformación?

4. Elabora un diseño en el que se apliquen todas las transformaciones geométricas analizadas.

Solicita al profesor que organice una presentación para que tú y tus compañeros expliquen sus diseños y las características de las transformaciones geométricas aplicadas.

Habilidades digitales

Para que conozcas algunas aplicaciones en el diseño con figuras geométricas, realiza una búsqueda en internet; puedes comenzar por la siguiente dirección electrónica:
www.museobbaa.com/educacion/archivos/pdf/LA_GEOMETRIA_EN_EL_ARTE.ARTE_Y_MATEMATICAS(ESO).pdf
(Consulta: 12 de enero 2015).

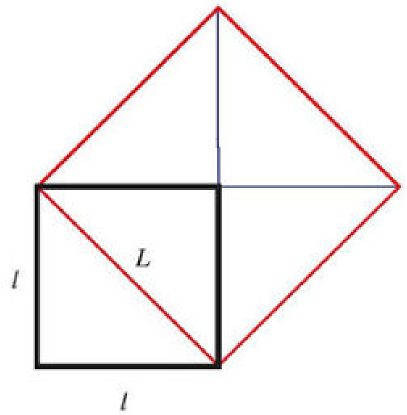
Medida

Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo

ACTIVIDADES INICIALES

Cuadrados sobre los lados de un triángulo rectángulo

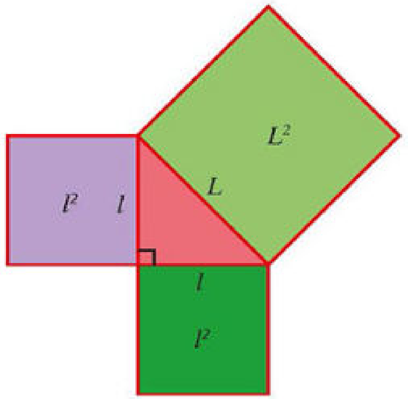
Se tiene un cuadrado de lado l, se traza una de sus diagonales (L), la cual sirve de lado para formar un nuevo cuadrado. ¿Cuál es la relación entre las áreas de ambos cuadrados?



Tracen figuras semejantes a la de la ilustración y realicen lo que se les solicita enseguida.

1. Expliquen cómo son los triángulos que forman la figura.
2. Usen los triángulos para comparar los valores l^2 y L^2.
3. Escriban la relación que se cumple entre l^2 y L^2.

Traza una figura como la de la ilustración; después realiza lo que se indica.



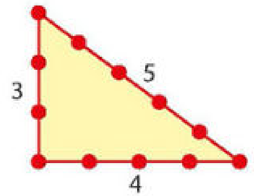
1. Verifica que se trate de un triángulo rectángulo que a su vez es un triángulo isósceles.
2. Escribe la relación que se cumple entre los valores de las áreas de los cuadrados trazados sobre cada uno de los lados del triángulo rectángulo.
3. Justifica la relación obtenida.

Comparen sus resultados y mediante un debate determinen cuál es la relación correcta.

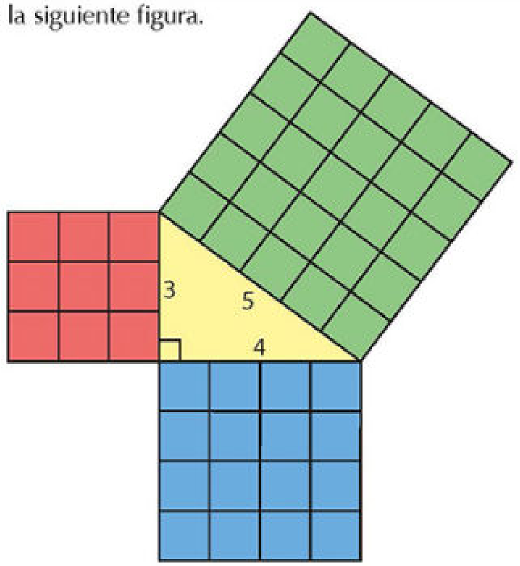
CONSTRUYO MIS CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES

Trazo de ángulos rectos con lazos y cordeles

Justina y Aurelio conocen un método muy antiguo para trazar ángulos rectos; éste consiste en hacer nudos a la misma distancia y determinar segmentos que cumplan con la relación establecida en la figura de la derecha.



Para saber cuál es la relación existente entre los lados de los triángulos rectángulos, trazaron la siguiente figura.



Glosario

hipotenusa. Es el lado opuesto al ángulo recto de un triángulo rectángulo.

catetos. Son los lados que forman el ángulo recto de un triángulo rectángulo.

Pienso

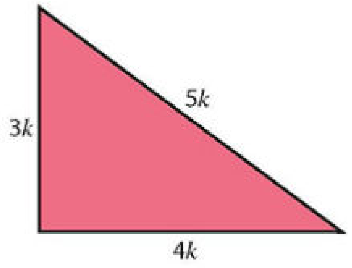
Traza en tu cuaderno una figura semejante a la de la ilustración anterior; luego responde lo que se solicita.

1. ¿Cuál es la relación entre el área del cuadrado construido sobre la **hipotenusa** del triángulo rectángulo y las áreas de los cuadrados trazados sobre cada uno de los **catetos** de dicho triángulo?

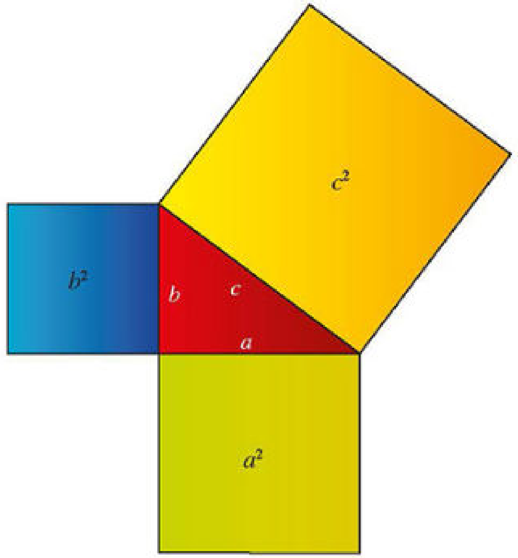
   Escribe una conclusión al respecto.

2. ¿Cual es la relación que se cumple entre los valores de los cuadrados que se construyen sobre los triángulos rectángulos de la forma representada en la figura?

   Justifica tu respuesta.



Samuel y Rosalinda desean verificar si la relación establecida en la página anterior se cumple para todos los triángulos rectángulos, por lo cual trazaron varios de ellos y sobre cada uno de sus lados trazaron cuadrados. Midieron los catetos y la hipotenusa, relacionaron estas longitudes con las áreas de los cuadrados y analizaron los resultados.



Analiza la siguiente figura para que puedas llevar a cabo lo que se pide.

1. Traza varias figuras similares a las de la ilustración, considerando los valores de la tabla. Por ejemplo, los catetos de la primera figura medirán $a = 7$ cm y $b = 5$ cm.

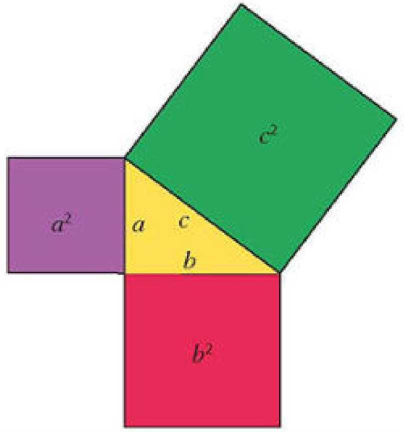
Figura	a^2	b^2	c^2	$a^2 + b^2$
1	49	25		
2	64	16		
3	81	49		

2. En cada figura mide la longitud c de la hipotenusa y calcula el valor c^2.

3. Completa la tabla y verifica que se cumple la relación que se ha establecido.

Comprendo

A partir de la siguiente figura es posible describir la relación entre los valores de las áreas de los cuadrados que se trazaron sobre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo, ¿cuál es esa relación?



Organicen un debate para discutir sobre la relación que establecieron.

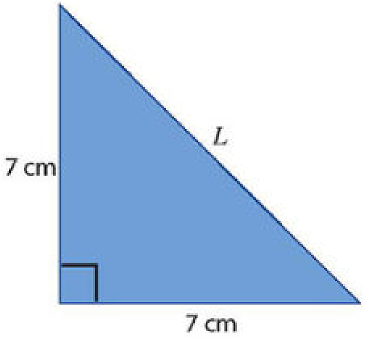
Comunico

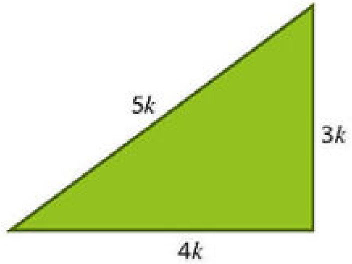
Redacta un texto en el que describas y justifiques la relación abordada en este apartado.

EVALUACIÓN FORMATIVA

Analiza las situaciones planteadas y resuelve lo que se solicita en cada caso.

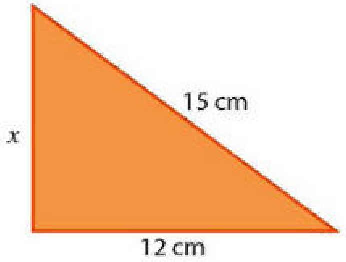
1. ¿Cuál es el valor de la hipotenusa (L) del triángulo rectángulo de la siguiente figura?





2. Justifica la siguiente afirmación: "El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos."

3. Calcula el valor que corresponde a x.



4. Redacta un escrito referente a los cuadrados que se pueden construir sobre los lados de un triángulo rectángulo. Argumenta tus afirmaciones.

Presenta tu trabajo al profesor para que lo valide.

Habilidades digitales

A fin de conocer otras relaciones en los triángulos rectángulos realiza una búsqueda en internet; puedes comenzar ingresando a la siguiente dirección electrónica:
www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/pitagoricas-ternas.html
(Consulta: 12 de enero 2015).
Haz un escrito sobre las relaciones obtenidas.

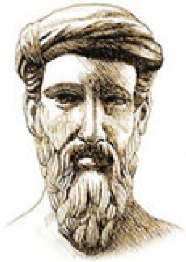
Bloque DOS

Medida

Explicitación y uso del teorema de Pitágoras

ACTIVIDADES INICIALES

Cuadrados sobre los lados de un triángulo rectángulo

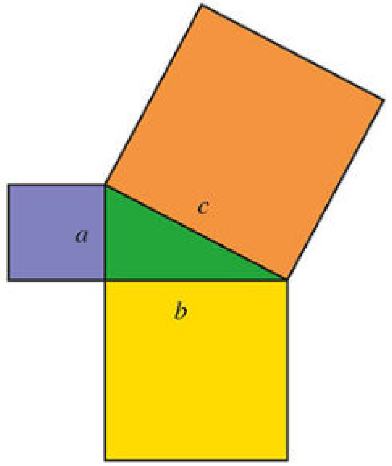


Una propiedad muy conocida y útil de los triángulos rectángulos es el famoso **teorema** de Pitágoras. El cual establece una relación entre las áreas de los cuadrados trazados sobre cada uno de los lados de un triángulo rectángulo.

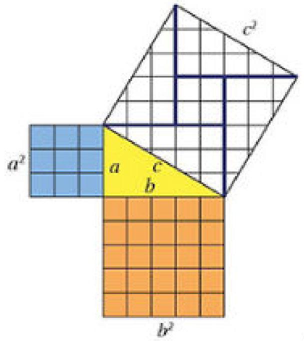
Glosario

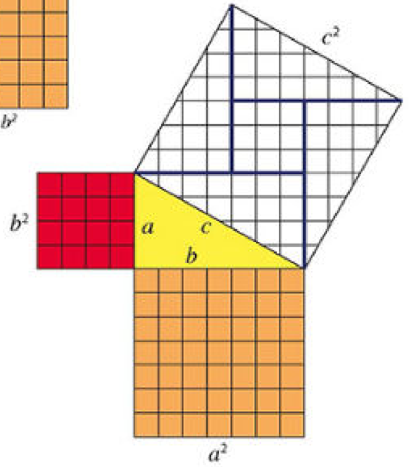
teorema. Es una afirmación que debe ser demostrada para su validación.

Si las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo son a, b y c, ¿cómo se pueden representar las áreas de los cuadrados construidos sobre cada uno de ellos?



Analiza las siguientes figuras y establece la relación entre los valores a^2, b^2 y c^2 que se cumple en los dos casos.





Analicen los resultados y respondan las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál es la relación entre los valores a^2, b^2 y c^2?
2. ¿Se cumplirá esta relación para todos los triángulos rectángulos? Justifiquen su respuesta.

CONSTRUYO MIS CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES

¿Cuál es el enunciado del teorema de Pitágoras?

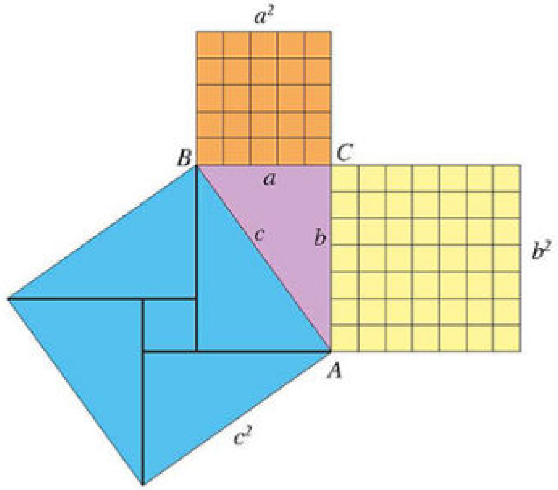
Los lados que forman el ángulo recto en un triángulo rectángulo se llaman catetos. ¿Cuál es la longitud de los catetos del triángulo rectángulo $\triangle ABC$?

El lado opuesto al ángulo recto se denomina hipotenusa. ¿Cuál es la longitud de ésta en el triángulo $\triangle ABC$?

¿Cómo se puede justificar que el área del cuadrado trazado sobre la hipotenusa se puede calcular, por lo menos, de dos maneras?

Si el área del cuadrado formado a partir de la hipotenusa es igual a c^2, ¿cómo se puede justificar que $c^2 = 74$?

Para este triángulo rectángulo se cumple la relación $c^2 = a^2 + b^2$.



Pienso

Analiza los siguientes enunciados y completa lo que falta.

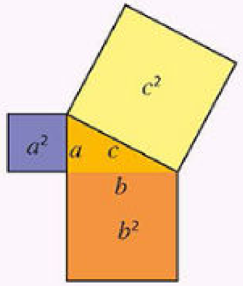
Teorema de Pitágoras

En todos los triángulos rectángulos, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de...

Relación pitagórica

Si c es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo y a, b son las longitudes de los catetos, entonces se cumple la igualdad:

$c^2 =$ ____________________

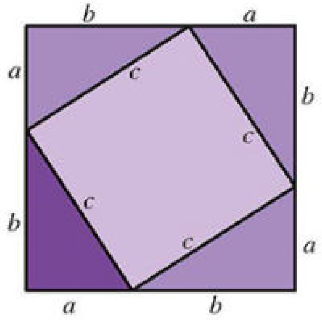


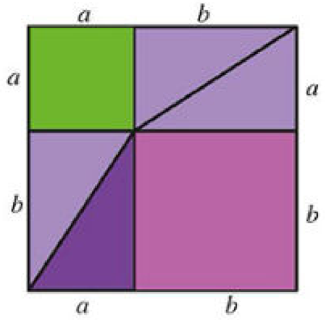
Con la finalidad de que fortalezcan la comprensión en torno a la relación que establece el teorema de Pitágoras realicen las siguientes actividades.

1. Tracen varios triángulos rectángulos y midan en cada uno las longitudes a, b y c.
2. Verifiquen que se cumple la igualdad establecida por el teorema de Pitágoras, es decir, $c^2 = a^2 + b^2$.

¿Cómo se puede justificar el teorema de Pitágoras?

Horacio y Palmira investigaron acerca de las justificaciones existentes para la relación establecida por el teorema de Pitágoras. Los dos comenzaron trazando un triángulo rectángulo de lados a, b y c; trazaron más triángulos de las mismas longitudes a fin de completar un cuadrado de lado $a + b$, como se muestra en la siguiente figura.





Sumando el área de las figuras contenidas en cada cuadrado obtuvieron la siguiente igualdad:

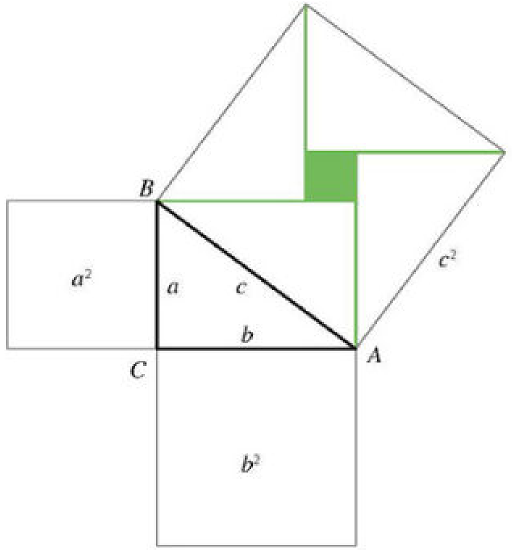
$$c^2 + 4\left(\frac{1}{2}ab\right) = a^2 + b^2 + 4\left(\frac{1}{2}ab\right)$$

¿Ya puedes inferir la relación que establece el teorema de Pitágoras?

Sigan el procedimiento indicado para verificar el teorema de Pitágoras.

1. Analicen la siguiente figura y justifiquen la siguiente igualdad:

$$c^2 = 4\left(\frac{1}{2}ab\right) + (b - a)^2$$

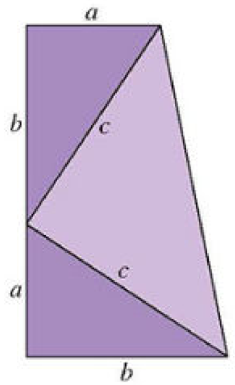


2. Realicen las operaciones algebraicas necesarias, hasta obtener la relación pitagórica: $c^2 = a^2 + b^2$.

Justifico

Demostración del teorema de Pitágoras usando la fórmula para calcular el área de un trapecio

Analiza y explica la siguiente justificación del teorema de Pitágoras.



$$A = \frac{(B + b)h}{2}$$

$$A = \frac{(a + b)(a + b)}{2}$$

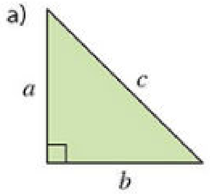
$$A = 2\left(\frac{1}{2}ab\right) + \frac{1}{2}c^2$$

¿Cómo se obtiene finalmente la relación pitagórica?

$$c^2 = a^2 + b^2$$

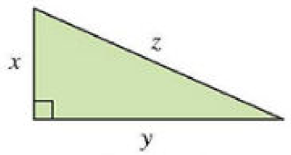
Analicen las siguientes figuras, y determinen si las relaciones escritas son correctas o en caso contrario corríjanlas. Justifiquen sus respuestas.

a)



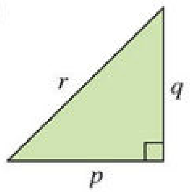
$b^2 = c^2 - a^2$

b)



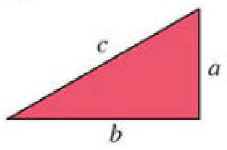
$x^2 + y^2 = z^2$

c)



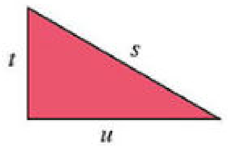
$q = \sqrt{r^2 - q^2}$

d)



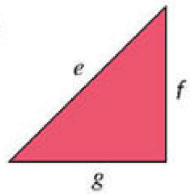
$c = \sqrt{a^2 - b^2}$

e)



$u = \sqrt{t^2 - s^2}$

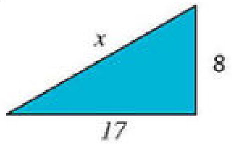
f)



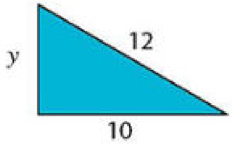
$f = \sqrt{g^2 - e^2}$

Calcula el valor de la incógnita en cada figura.

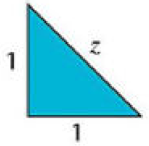
a)



b)

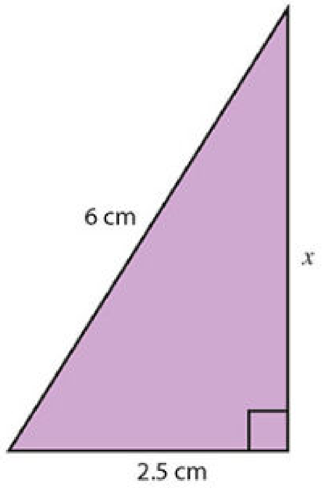


c)



Rosalinda y Alberto investigaron acerca de aplicaciones dadas al teorema de Pitágoras, y encontraron una versión moderna de un problema resuelto por los babilonios.

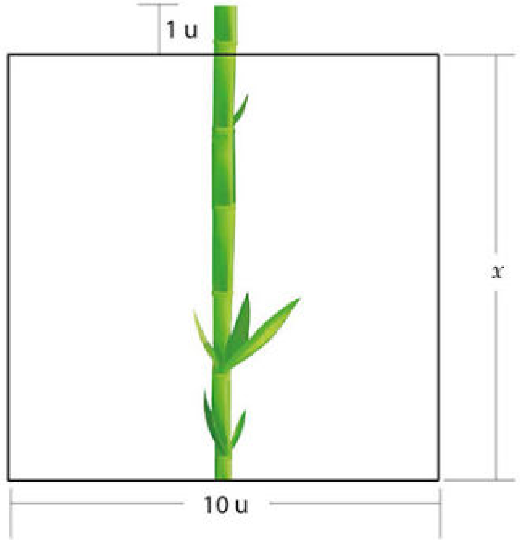
¿Qué altura alcanza una escalera de 6 m sobre la pared si la distancia entre ésta y el punto de apoyo es de 2.5 m?



¿De qué manera se aplica el teorema de Pitágoras en este caso?, ¿cómo se puede comprobar la solución obtenida?

Resuelve la situación planteada y verifica tu respuesta.

En la antigüedad, los chinos se plantearon lo siguiente: en un acuario de base cuadrada, de lado $l = 10$ unidades, un bambú crece en el centro, hasta una unidad sobre la superficie del agua. Cuando éste se inclina hacia un lado, su extremo superior toca el borde del acuario, exactamente al nivel del agua. ¿Cuál es la profundidad del acuario y cuál es la longitud del bambú?



Observen la figura de la izquierda y realicen lo que se indica a continuación.

1. ¿Cómo se puede representar la longitud del bambú?
2. ¿De qué manera se puede dibujar un triángulo rectángulo para poder aplicar el teorema de Pitágoras?
3. ¿Cuál es la ecuación que sirve para modelar la situación?
4. Resuelvan la ecuación e interpreten la solución de acuerdo al problema.
5. Comprueben que las respuestas obtenidas son correctas, es decir, que satisfacen las condiciones planteadas en el problema.

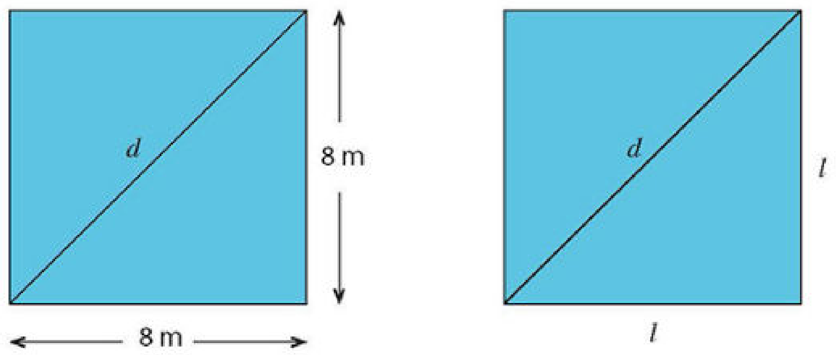
Aplico

Otro problema chino

Un bambú medía 10 unidades de altura. Un día se rompió, ahora su extremo superior toca el suelo a 3 unidades de distancia de su base, de tal manera que forma un triángulo rectángulo.
¿Cuál es la altura de la parte que quedó en pie?, ¿cuál es la longitud de la parte que cayó? Usa el teorema de Pitágoras para responder las preguntas.

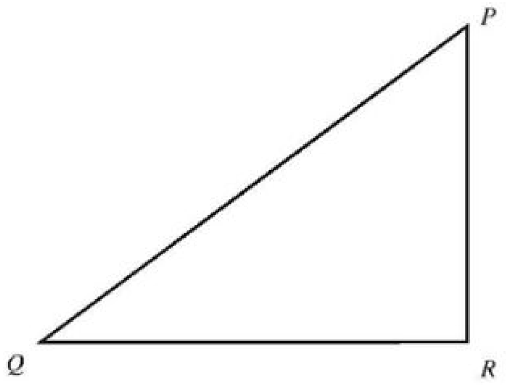
Resuelvan los siguientes problemas y verifiquen que sus respuestas sean correctas.

1. ¿Cuál es la longitud de la diagonal de los siguientes cuadrados?



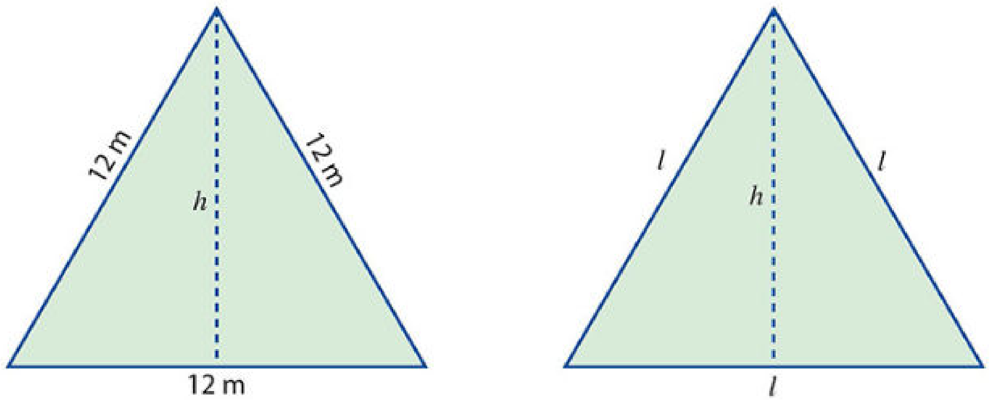
2. Calculen el valor de las diagonales de los siguientes rectángulos.

3. Alberto eleva un papalote con un hilo que tiene una longitud de 35 m. Rosalinda se ubica exactamente abajo del papalote y mide la distancia que la separa de Alberto, que resulta ser de 20 m. ¿Cuál es la altura que alcanzó el papalote?

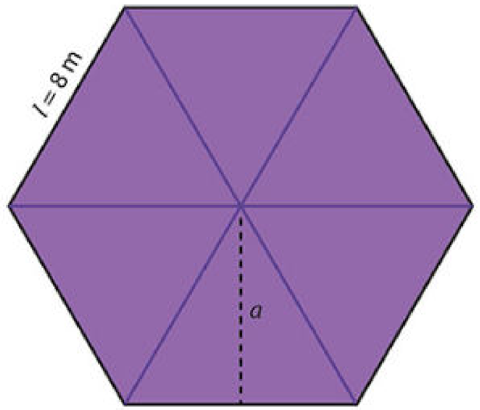


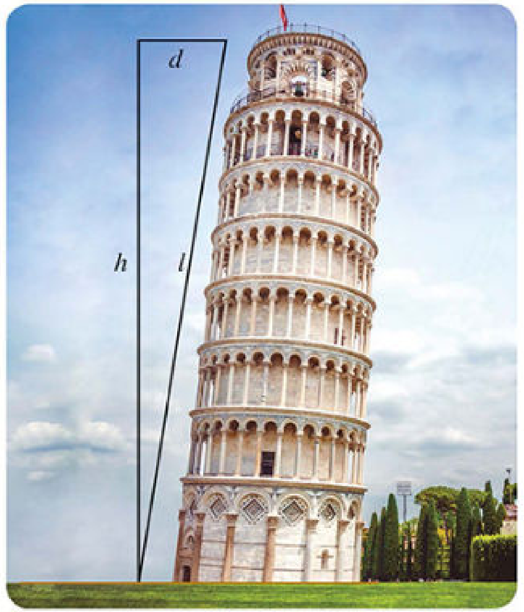
Lee con atención cada enunciado y aplica el teorema de Pitágoras para obtener la solución correspondiente.

1. Calcula la altura de los triángulos equiláteros y también el área de cada uno.



2. Usa los trazos hechos dentro del hexágono regular para calcular su área.





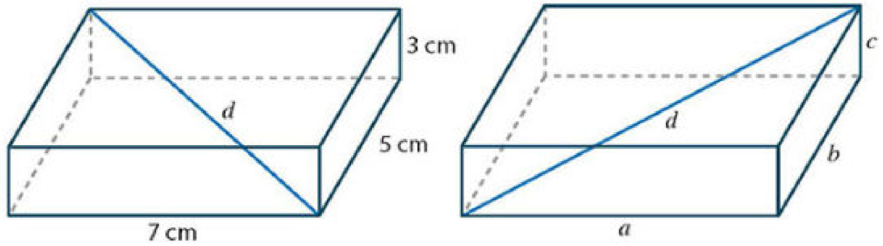
3. Se sabe que el punto más alto de la Torre de Pisa se encuentra aproximadamente a 55 m de altura del suelo y está desviado 5 m respecto a la vertical, ¿cuál es su longitud real?

Aplicaciones del teorema de Pitágoras en problemas con sólidos geométricos

Actividad extraclase

Realiza lo que se solicita en cada caso.

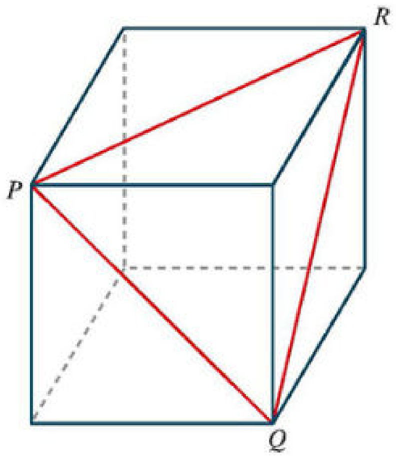
1. Obtén la longitud de la diagonal de cada uno de los **paralelepípedos rectos**.



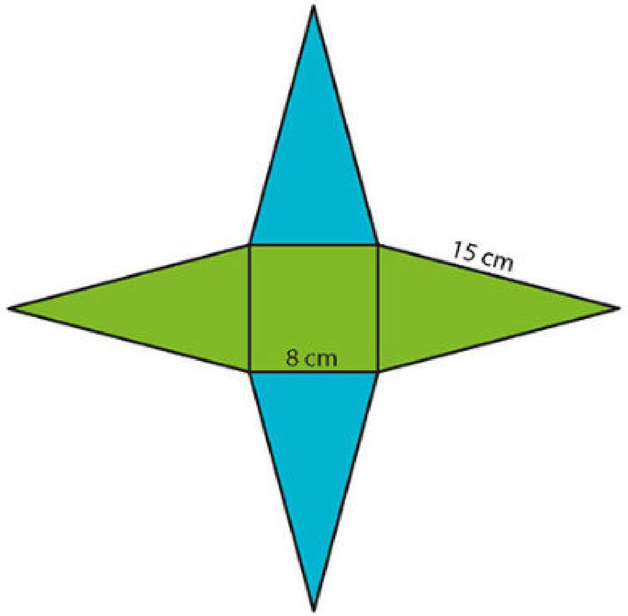
Glosario

paralelepípedos rectos. Cuerpos geométricos formados por seis caras con forma de paralelogramo, donde las caras son perpendiculares entre sí y, además, son iguales y paralelas dos a dos.

2. ¿Cuál es el área del triángulo formado con algunos vértices de un cubo?



3. Calcula la altura de la pirámide cuadrangular, que se obtiene a partir del desarrollo plano mostrado.



Comunico

Redacta un texto en computadora en el que describas los procedimientos seguidos en cada uno de los casos anteriores y entrégaselo a tu profesor para que lo valide.

Lúnulas de Hipócrates

Glosario

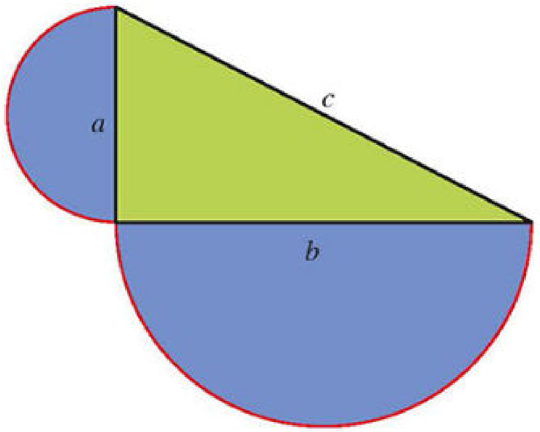
lúnulas. Figuras semejantes a una parte de la luna y que se forman con la intersección de dos círculos.

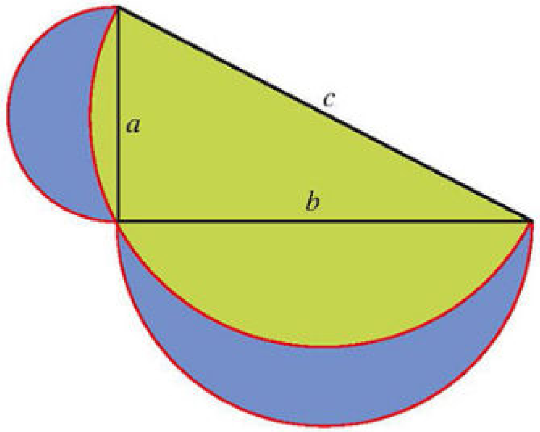
Con el fin de que apliques el teorema de Pitágoras, conozcas las figuras geométricas denominadas **lúnulas** y descubras la fórmula que permite calcular su área, realiza lo que se indica a continuación.

1. Traza un triángulo rectángulo de lados a, b y c.
2. Sobre cada cateto traza un semicírculo como en la figura de la derecha.
3. Calcula el área de la figura formada por el triángulo y los semicírculos.
4. De acuerdo con el teorema de Pitágoras $c^2 = a^2 + b^2$, si multiplicamos por π y dividimos entre 8 en ambos miembros de la ecuación se obtiene la siguiente igualdad:

$$\frac{\pi c^2}{8} = \frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi b^2}{8}$$

   a) Usa esta expresión para simplificar la expresión que obtuviste en el cálculo del área en el paso 3.



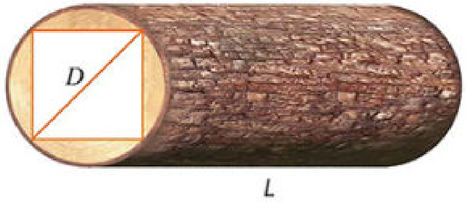


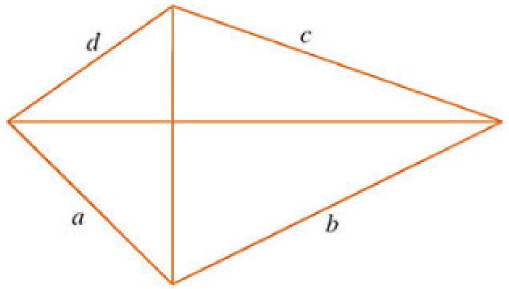
5. Ahora traza un semicírculo sobre la hipotenusa, de tal manera que se formen las figuras conocidas como lúnulas de Hipócrates.
6. En el paso 3 calculaste el área total de la figura. Ahora resta el área del semicírculo mayor para obtener el área de las lúnulas de Hipócrates.
7. Escribe una definición de las lúnulas de Hipócrates.

Comenten sus resultados con el resto del grupo y su profesor.

Lee y analiza cada enunciado para que posteriormente respondas lo que se solicita.

1. Calcula el volumen de la viga cuadrada que se puede obtener del tronco de la figura, en la que $D = 75$ cm y $L = 250$ cm.

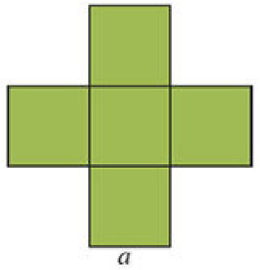


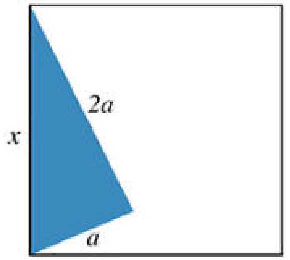


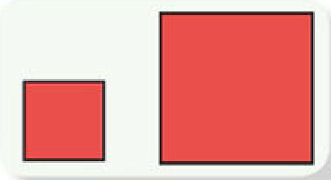
2. Tomando en cuenta que las diagonales del cuadrilátero son perpendiculares, justifica la siguiente igualdad:

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

3. Verifica y justifica que la cruz y el cuadrado son figuras geométricas equivalentes, es decir, que tienen la misma área.







4. Construye un cuadrado cuya área sea igual a la suma de las áreas de los siguientes cuadrados.
5. Describe en un escrito el procedimiento que seguiste y preséntalo al profesor.

Habilidades digitales

Con el propósito de que fortalezcas tus conocimientos sobre el teorema de Pitágoras, realiza una búsqueda en internet; puedes comenzar ingresando a la siguiente dirección electrónica:
http://www.um.es/docencia/pherrero/mathis/pitagoras/teorema.htm
(Consulta: 17 de enero de 2015).
En un escrito reproduce las justificaciones del teorema de Pitágoras que mejor comprendas y preséntalo al profesor.

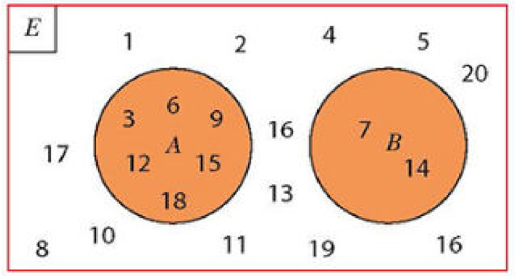
Nociones de probabilidad

Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma)

ACTIVIDADES INICIALES

Probabilidad del evento A o B

Arturo y Alma usaron el espacio muestral conformado por los números del 1 al 20 para definir los eventos A y B. El evento A se forma con los múltiplos de 3 y el evento B con los múltiplos de 7.



¿Cuáles son los múltiplos de 3 que integran el evento A?

¿Cuáles son los múltiplos de 7 que forman el evento B?

Primero escribieron cada número en un papelito y los colocaron en una caja. Después realizaron un experimento aleatorio, extrayendo un número al azar.

Con base en lo anterior, procede con lo que se solicita a continuación

a) Calcula las probabilidades $P(A)$ y $P(B)$.

b) Escribe los resultados posibles del evento A o B, que es el evento formado por los resultados posibles que están en A o están en B.

c) Calcula $P(A \text{ o } B)$.

d) ¿Qué relación se puede establecer entre las siguientes probabilidades?

$$P(A),\ P(B),\ P(A \text{ o } B)$$

Analicen lo que sucede para otros eventos A y B formados a partir del mismo espacio muestral. Ahora A se integra por los múltiplos de 3, y B por los múltiplos de 5, mientras que A o B está formado por los números que son múltiplos de 3 o de 5.

¿Se cumplirá la misma relación que en la situación anterior? ¿Por qué sí o por qué no?

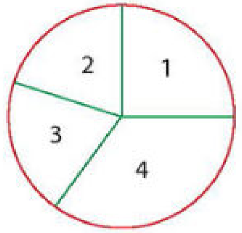
CONSTRUYO MIS CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES

¿Cómo se calcula la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes?

Para que conozcas la relación que existe entre $P(A)$, $P(B)$ y $P(A \text{ o } B)$ realiza las siguientes actividades.

1. El disco de la figura se usa para jugar con dardos. De acuerdo con el tamaño de cada segmento se han determinado estas probabilidades:

$$P(1) = 0.25$$
$$P(2) = 0.1875$$
$$P(3) = 0.1875$$
$$P(4) = 0.375$$



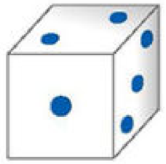
También se han definido los eventos: $A = \{1, 4\}$ $B = \{3\}$

a) Describe el **evento A o B**
b) Calcula $P(A \text{ o } B)$
c) Describe la relación que se cumple entre las probabilidades $P(A)$, $P(B)$ y $P(A \text{ o } B)$
d) Toma el evento $C = \{3,4\}$ y describe el evento A o C
e) Calcula $P(A \text{ o } C)$
f) ¿Se cumple la relación anterior entre las probabilidades de los eventos $P(A)$, $P(C)$ y $P(A \text{ o } C)$, ¿por qué?

Glosario

evento A o B. Es el evento que se forma con los resultados posibles pertenecientes a A o a B.

2. Analiza lo que sucede en el lanzamiento de un dado y realiza lo que se solicita en cada caso.

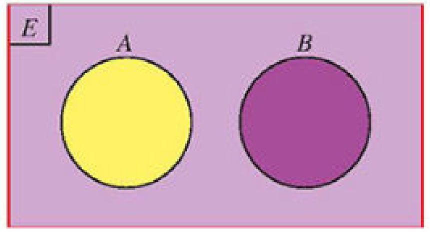


a) Determina el espacio muestral E.
b) Describe los siguientes eventos: A se forma con los números pares, B se integra por los números impares y C se integra con los números menores que 5.
c) Explica la relación presente entre las probabilidades $P(A)$, $P(B)$ y $P(A \text{ o } B)$.
d) ¿Se cumple la relación anterior entre las probabilidades $P(A)$, $P(C)$ y $P(A \text{ o } C)$?

Generalizo

Regla de la suma de probabilidades

En un experimento aleatorio con un espacio muestral E, si los eventos A y B son mutuamente excluyentes, entonces se cumple la relación:
$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$



Responde lo que se solicita a continuación.

1. La siguiente tabla de datos presenta la frecuencia con que respondieron 120 personas a la pregunta: ¿Qué talla de camisa usa? Calcula las siguientes probabilidades.

Talla	Frecuencia
36 (*A*)	19
38 (*B*)	39
40 (*C*)	41
42 (*D*)	21
Total	120

   a) $P(A)$, $P(B)$ y $P(A \text{ o } B)$
   b) Probalidad de que una persona seleccionada al azar use una talla mayor que 38.
   c) Probalidad de que sea una talla menor que 40.
   d) Probalidad de que use una talla menor que 42.
   e) Calcula las probabilidades $P(A \text{ o } B)$, $P(A \text{ o } C)$, $P(A \text{ o } D)$, $P(B \text{ o } C)$, $P(B \text{ o } D)$, $P(C \text{ o } D)$.
   f) ¿Cuáles probabilidades obtenidas en el inciso e) corresponden a las respuestas de los incisos b) y c)?

2. José aplicó una encuesta a 36 compañeros para saber si el fin de semana estuvieron divirtiéndose en casa o fuera de ella, y encontró que:

$$P(\text{Diversión en casa}) = \frac{16}{36} \qquad P(\text{Fuera de casa}) = \frac{22}{36}$$

¿Calcula las probabilidades de que hayan estado en casa o fuera de ella?

¿Se puede aplicar la fórmula $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$?, ¿por qué?

3. Calcula la probabilidad de que al lanzar 2 dados la suma de puntos sea 8 o 9.

Actividad extraclase

Con el propósito de que desarrolles tus habilidades para calcular probabilidades, haz una investigación bibliográfica en *La sorpresa de los números: Un viaje al fascinante universo de las matemáticas* de Anna Cerasoli que puedes encontrar en tu Biblioteca de Aula o Escolar (Libros del Rincón).

Organicen una presentación grupal de los problemas que analiza Anna Cerasoli, para que posteriormente los resuelvan aplicando el cálculo de probabilidades.

¿Cómo se calcula la probabilidad de ocurrencia de eventos complementarios?

Alejandro y Yadira pretenden conocer la relación que se presenta entre las probabilidades $P(A)$ y $P(A')$ de dos eventos complementarios, A y A'; por lo que analizaron el espacio muestral que corresponde al lanzamiento de 3 monedas.

Comprendo

Dos eventos A y A' son complementarios si se cumplen estas condiciones:
1. A o $A' = E$.
2. A y A' son mutuamente excluyentes.

$$E = \{(a, a, a), (a, a, s), (a, s, a), (s, a, a), (a, s, s), (s, a, s), (s, s, a), (s, s, s)\}$$

Después determinaron los resultados posibles que cumplieron con la condición "se obtuvieron 2 soles", con lo cual determinaron el evento A.

$$A = \{(a, s, s), (s, a, s), (s, s, a)\}$$

Para establecer el evento A' (no ocurre A) llamado el **complemento de A**, tomaron los casos en los que "no se obtuvieron 2 soles".

$A' = \{ \qquad \qquad \qquad \}$

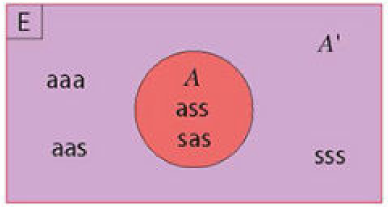
Glosario

complemento de A. Evento aleatorio formado por los resultados posibles del espacio muestral que no están en el evento A.

Escribe en tu cuaderno los resultados posibles del evento A' y haz lo que se indica a continuación.

1. Calcula $P(A)$ y $P(A')$
2. ¿Cuál es la relación que se cumple entre las probabilidades de dos eventos complementarios A y A'?

Completen el diagrama de la derecha y expliquen la relación que observaron en la actividad anterior.



Para las siguientes situaciones determinen un evento complementario y verifiquen que se cumple la relación: $P(A) + P(A') = 1$.

1. Cierta urna contiene 3 bolas rojas, 2 blancas, 4 verdes y 5 azules. A es el evento formado por todas las bolas rojas.
2. Lanzamiento de 2 monedas. A es el evento formado de obtener el mismo resultado con las dos monedas, esto es: $A = \{(a, a), (s, s)\}$.
3. Abigail organiza una rifa para la cual tiene 100 boletos, numerados del 1 al 100, A es el evento que incluye a todos los números primos.
4. En un lote de 95 focos se localizaron 5 focos defectuosos. A está formado por los focos en mal estado.
5. Para el lanzamiento de 2 dados se establece que el evento A está formado por los resultados posibles en los que la suma de puntos es menor que 7. $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Fórmula para calcular la probabilidad del evento A o B

Jaime y Fabiola analizan una situación en la que los eventos A, B no son mutuamente excluyentes; pretenden construir una fórmula para calcular el valor $P(A \text{ o } B)$ de la probabilidad de que ocurra el evento A o B.

El experimento aleatorio que analizan consiste en el lanzamiento de 4 monedas. Ellos comenzaron a escribir los resultados posibles en una tabla como la de la derecha para determinar el espacio muestral E.

Espacio muestral para el lanzamiento de 4 monedas			
aaaa	aaas	aasa	asaa
saaa	aass		
			asss
sass	ssas	sssa	ssss

Continúa analizando la situación planteada por Jaime y Fabiola, y realiza lo que se solicita a continuación.

1. Completa en tu cuaderno el espacio muestral E.
2. Escribe los resultados posibles que son favorables al evento A y calcula su probabilidad. A se forma con los resultados posibles en los que las 2 primeras monedas cayeron "sol".
3. Describe el evento B y calcula $P(B)$, tomando en cuenta que B se integra por los resultados posibles en los que las 2 últimas monedas cayeron "águila".

Pienso

Verifica si la fórmula de la suma de probabilidades se cumple o no.

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$$

Justifica tu respuesta.

Comparen sus resultados y elaboren una conclusión al respecto.

Fabiola y Jaime siguen examinando situaciones aleatorias para elaborar la fórmula para calcular $P(A \text{ o } B)$ en los casos en los que los eventos A o B no son mutuamente excluyentes. Para ello recuerdan el experimento aleatorio de lanzamiento de dos dados y determinan el espacio muestral E.

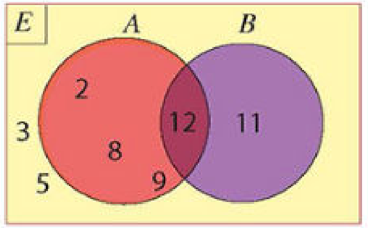
$$E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \text{ y } 12\}$$

Definen el evento A, como el formado por los resultados posibles en que la suma de puntos es un número par, B se integra por los resultados posibles para los que la suma es mayor que 9, esto es:

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \qquad B = \{10, 11 \text{ y } 12\}$$

Utilicen la siguiente figura para clasificar los resultados posibles del experimento aleatorio.

Analicen la situación anterior y lleven a cabo las siguientes actividades.



1. Completen la figura y expliquen cómo se han ubicado los números 3, 5, 8, 9, 11 y 12.
2. Terminen de clasificar los resultados posibles del espacio muestral en un diagrama como el de la derecha.
3. Calculen $P(A)$ y $P(B)$.
4. Determinen el evento A o B y calculen $P(A \text{ o } B)$.
5. ¿Se cumple la igualdad $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$?, ¿por qué?

Glosario

A y B. Es el evento que se forma con los resultados posibles que pertenecen al evento A y que también pertenecen a B.

Justifico

La fórmula que se puede usar para calcular $P(A \text{ o } B)$ es la siguiente:
$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$

EVALUACIÓN FORMATIVA

Analiza los enunciados y realiza lo que se solicita en cada caso.

1. En las elecciones para nombrar al presidente de la generación a la que pertenece Gustavo, se obtuvieron los siguientes resultados:

Nombre del candidato	Gustavo	Elisa	Teodomiro	Total
Número de votos	58	51		151

Si se entrevista a un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya votado por un hombre?

2. Una persona tira a un blanco, dividido en tres secciones. La probabilidad de un impacto en la zona 1 es de 0.42 y en la sección 2 es de 0.38. Calcula la probabilidad de que el tirador haya impactado en la sección 3.
3. Se sabe que de un grupo de 52 alumnos, 26 viajan en autobús y 30 en el metro para llegar a la escuela. Calcula la probabilidad de que al escoger al azar a un alumno, éste use ambos medios de transporte

4. Redacta un texto en el que expliques el uso de las siguientes fórmulas:

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$$

Indica un ejemplo para cada fórmula. Presenta tu escrito al profesor para que lo valide.

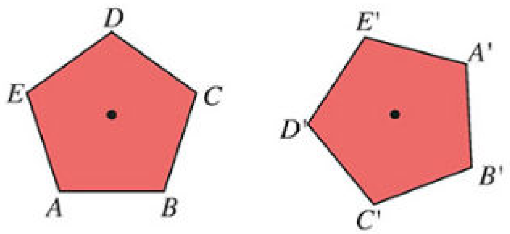
Habilidades digitales

Resuelve algunos ejercicios que se encuentran en la siguiente página y preséntalos a tu profesor.
http://www.aaamatematicas.com/sta-prob-simple.htm
(Consulta: 20 de enero de 2015).

Evaluación final

Analiza cada uno de los planteamientos para que respondas lo que se solicita.

1. ¿Qué transformaciones geométricas se aplicaron a la figura de la izquierda para obtener la figura de la derecha?



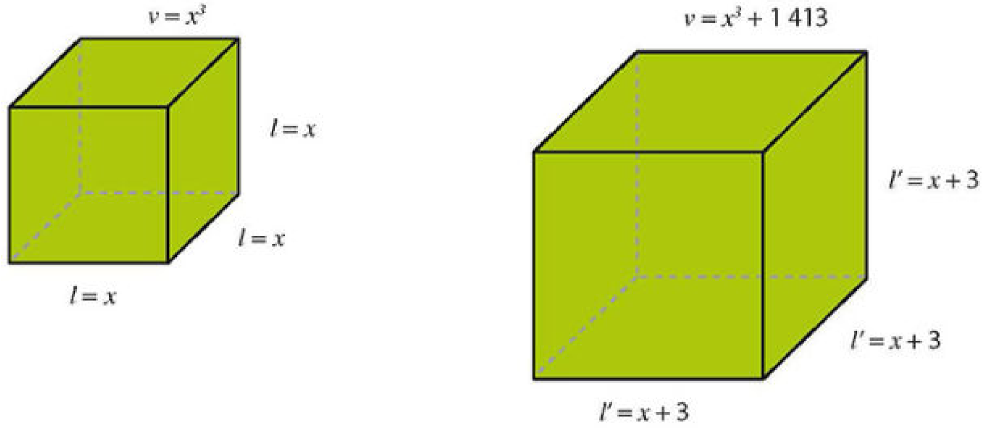
a) ¿Cuáles son las características de la primera transformación aplicada?

b) ¿Y las de la segunda?

c) En el caso de la tercera transformación, ¿qué elementos observas?

2. Alfredo colocó una escalera de 5 m de longitud sobre una pared, de tal manera que la altura alcanzada es el doble de la distancia que separa al otro extemo de la misma pared. ¿Cuáles son las longitudes del triángulo que se forma en esta situación?

3. La diferencia entre las aristas de dos cubos es de 3 cm, mientras que la diferencia entre sus volúmenes es de 1 413 cm³. Calcula la longitud de las aristas y los volúmenes de los cubos.



4. En la siguiente tabla se presentan datos sobre la inscripción de alumnos a la escuela secundaria "Benito Juárez".

Inscripción en la escuela secundaria "Benito Juárez"			
Turno \ Sexo	Masculino	Femenino	Subtotales
Matutino	350	300	
Vespertino	250		
Subtotales		530	

a) Completa los datos de la tabla.

b) Determina dos eventos A y B para los que se cumpla la siguiente igualdad:

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$$

c) Describe dos eventos M y M' en los que se establezca la siguiente igualdad:

$$P(M) + P(M') = 1$$

Con este código, valora tus conocimientos sobre los cuadrados y catetos dentro del teorema de Pitágoras.

Marca el círculo que contenga la respuesta correcta a cada cuestión. En tu cuaderno, escribe los razonamientos y procedimientos que seguiste en todos los casos.

1. La traslación de figuras es una transformación…

   ○ Directa ○ Inversa ○ Rígida ○ Imaginaria

2. La regla de la suma $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$ se aplica para eventos…

   ○ Aleatorios ○ Mutuamente excluyentes ○ Azarosos ○ Ordinarios

3. Para que $P(A) + P(B) = 1$, A y B tienen que ser…

   ○ Independientes ○ Mutuamente excluyentes ○ Disjuntos ○ Complementarios

4. Las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 - 16 = 0$ son…

   ○ 16 y -16 ○ 4 y -4 ○ 2 y -2 ○ 8 y -8

5. No es una propiedad de la rotación de figuras…

   ○ Orden ○ Colinealidad ○ Conservación de ángulos ○ Conservación de segmentos

6. El lado mayor de un triángulo rectángulo se llama…

   ○ Cateto menor ○ Cateto mayor ○ Ángulo recto ○ Hipotenusa

7. Dos traslaciones consecutivas se pueden sustituir por…

   ○ Una rotación ○ Una simetría axial ○ Una traslación ○ Una simetría central

8. En un triángulo rectángulo de catetos p, q e hipotenusa k se cumple la relación…

   ○ $p^2 = q^2 + k^2$ ○ $q^2 = p^2 + k^2$ ○ $k^2 = p^2q^2$ ○ $k^2 = p^2 + q^2$

9. Cualquier traslación se determina mediante…

   ○ Una dirección y una magnitud

   ○ Un centro y un ángulo

   ○ Una recta y un ángulo

   ○ Un ángulo y una magnitud

10. Una rotación queda definida mediante…

   ○ Un ángulo ○ Un centro ○ Un centro y un ángulo ○ Una dirección

BLOQUE TRES

Ejes temáticos

- Sentido numérico y pensamiento algebraico
- Forma, espacio y medida
- Manejo de la información

Flor fractal. Diseño de un fractal hecho a partir de las hojas de una flor, el cual es construido mediante algoritmos computacionales.

Aprendizajes esperados

- Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.

Competencias

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas eficientemente

Bloque TRES

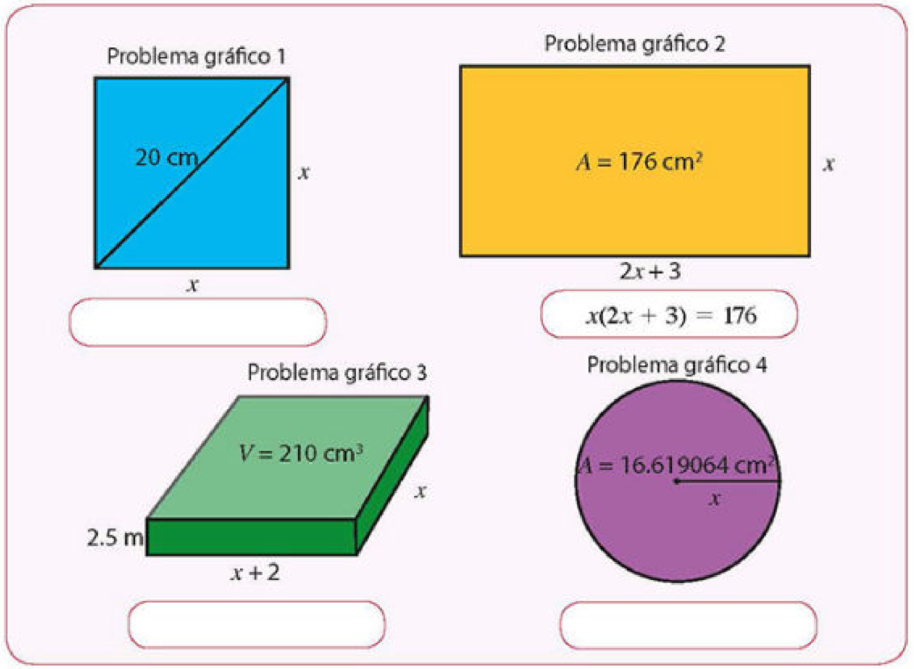
Patrones y ecuaciones

Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones

ACTIVIDADES INICIALES

Problemas gráficos

Nélida y Horacio se plantean los siguientes problemas gráficos.



Analicen cada uno de los planteamientos anteriores y realicen las actividades que se indican a continuación.

1. Redacten un enunciado para cada problema.
2. Construyan ecuaciones que representen de manera algebraica las situaciones y escríbanlas en los recuadros vacíos.
3. Calculen las raíces de las ecuaciones y verifiquen que sean correctas.
4. Obtengan la solución adecuada a cada situación y compruébenla.

Comparen sus respuestas y soliciten al profesor que las valide en un proceso grupal.

CONSTRUYO MIS CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES

Ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

Pienso

¿Por qué las siguientes ecuaciones son cuadráticas?

a) $x^3 + 3x^2 + 12x + 8 = x^3 + 2$ *b)* $\frac{3}{x} + \frac{x}{27} = 0$ *c)* $\sqrt{2x+1} = x$

La forma general de las ecuaciones cuadráticas es:

$ax^2 + bx + c = 0$

a = coeficiente del término de segundo grado
b = coeficiente del término de primer grado
c = término independiente

¿Por qué razón el coeficiente a del término cuadrático no puede ser 0?

Completen y expliquen la tabla que se encuentra a continuación para clasificar las ecuaciones de segundo grado.

Ecuaciones cuadráticas		
Completas	**Incompletas mixtas**	**Incompletas puras**
$ax^2 + bx + c = 0$ $a \neq 0, b \neq 0$ y $c \neq 0$	$\boxed{\quad\quad} = 0$ $a \neq 0, b \neq 0$ y $c = 0$	$\boxed{\quad\quad} = 0$ $a \neq 0, b = 0$ y $c \neq 0$

Analiza y completa la definición de ecuación cuadrática.

Una ecuación cuadrática es aquella que se puede escribir en la forma:

$\boxed{\quad\quad} = 0$ $\boxed{a \neq 0}$

En ella a, b y c son cantidades constantes y x es la incógnita, por ello, también se conoce como ecuación de segundo grado con una incógnita.

Revisen los contenidos de esta página y usen las propiedades de la igualdad para transformar las siguientes ecuaciones en la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

En cada caso determinen los valores de los coeficientes a, b y c.

a) $3x^2 - 8x = 25$
b) $2x^2 + x = 5x^2 - 7$
c) $x^2 - 2x + 12 = 2x(x + 10)$
d) $5x^2 = 7x$
e) $12x^2 = 156$
f) $\frac{1}{2}gt^2 + vt + h = 0$
g) $x^2 = 16$
h) $2\pi r^2 + 2\pi rh = a$
i) $\frac{x}{5} = \frac{12.5}{x}$

¿Cuál es la fórmula general que se puede aplicar para calcular las raíces de las ecuaciones cuadráticas?

Glosario

números impares consecutivos. Números impares que se ubican uno enseguida del otro.

Yolanda y Néstor resuelven problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas, por ejemplo:

Si el producto de dos **números impares consecutivos** es igual a 255, ¿cuáles son esos números?

Si el primer número impar se representa mediante $2x+1$, ¿cómo se puede representar el número impar consecutivo?

¿Qué expresión algebraica se usaría para representar el hecho de que el producto de los números impares consecutivos es 255?

Completen y justifiquen que la ecuación cuadrática que representa el problema planteado es:

$$4x^2 + \quad - \quad = 0$$

¿Cuáles son los valores para a, b y c en la ecuación cuadrática anterior?

Según Yolanda:

$$x_1 = \frac{-8+\sqrt{8^2-4(4)(-252)}}{2(4)}$$

Según Néstor:

$$x_2 = \frac{-8-\sqrt{8^2-4(4)(-252)}}{2(4)}$$

Analicen los resultados de Néstor y Yolanda. Posteriormente, realicen lo que se solicita en cada caso.

1. Calculen las raíces x_1 y x_2 de la ecuación cuadrática anterior.
2. Resuelvan el problema de los números impares consecutivos y comprueben sus soluciones.
3. Tomando en cuenta que la ecuación que se usó para resolver el problema anterior es de la forma $ax^2+bx+c=0$, procuren determinar las fórmulas aplicadas por Néstor y Yolanda para calcular las raíces de la ecuación cuadrática.
4. Empleen las fórmulas anteriores para resolver los siguientes problemas aplicando ecuaciones cuadráticas.
   a) El producto de dos números consecutivos es 3 782, ¿de qué números se trata?
   b) Calculen las dimensiones del rectángulo cuya área es de 30 m^2 y su perímetro mide 22 m.

Para que fortalezcan su aprendizaje y resuelvan otras ecuaciones cuadráticas, consulten el tema "Ecuaciones cuadráticas" en el libro *Crónicas algebraicas* de Concepción Ruiz y Sergio de Régules. El cual pueden encontrar en su Biblioteca de Aula o Escolar (Libros del Rincón).

Generalizo

Fórmulas para resolver ecuaciones cuadráticas

Las raíces de la ecuación cuadrática con una incógnita

$$ax^2+bx+c=0$$

se pueden calcular con las fórmulas:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2 - \quad}}{2a} \qquad x_2 = \frac{- \quad - \sqrt{\quad^2-4(a)(c)}}{\quad}$$

Realiza lo que se indica enseguida.

1. Completa las fórmulas anteriores para calcular las raíces x_1 y x_2 de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$.
2. Explica por qué las fórmulas anteriores se sintetizan en la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas.

Fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas:

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

3. Verifica que la aplicación de la **fórmula general cuadrática** requiere que se cumplan las siguientes condiciones.
   a) El coeficiente del término cuadrático cumple con $a \neq 0$.
   b) El coeficiente del término de primer grado es b.
   c) El término independiente es c.
   d) El segundo miembro de la ecuación cuadrática es 0.
   e) La raíz x_1 de la ecuación cuadrática se obtiene con el signo + del radical y la segunda raíz x_2 con el signo −.

Glosario

fórmula general cuadrática. Es la expresión algebraica $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ que sirve para calcular las raíces o soluciones de todas las ecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c=0$

¿Cómo se pueden calcular las raíces de la ecuación $-3x^2-3x=-18$?

1. Ahora se obtiene la forma y es $ax + bx + c$, por lo que se puede proceder:
$$-3x^2-3x+(\quad)=-18+(\quad)$$
$$-3x^2-3x+18=0$$
2. ¿Cuáles son los valores para a, b y c? $\boxed{a=-3}$ $\boxed{b=\quad}$ $\boxed{c=\quad}$
3. Se sustituyen estos valores en la fórmula general:
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x=\frac{-(\quad)\pm\sqrt{(\quad)^2-4(\quad)(\quad)}}{2a}$$
4. Se calculan las raíces x_1 y x_2, usando un signo cada vez.

Calcula los valores x_1 y x_2, y verifica que sean las raíces de la ecuación.

$$-3x^2 - 3x = -18$$

Resuelve los siguientes problemas mediante el uso de ecuaciones cuadráticas y la aplicación de la fórmula general para calcular las raíces.

1. ¿Cuánto tiempo tarda una pelota en alcanzar una altura de 200 m, si se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad de 70 m/s? Usa la siguiente fórmula:

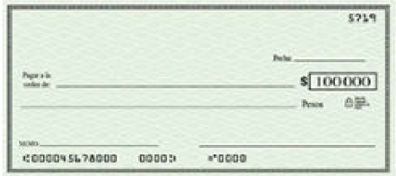
$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Sustituye los valores $h = 200$ m, $v_0 = 70$ m/s y $g = 9.8$ m/s^2 para obtener una ecuación cuadrática.

2. ¿Cuánto tiempo t tarda una pelota en regresar al punto de partida si se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad de 90 m/s? ¿Cuál sería el valor de h que permitiría usar la fórmula anterior?
3. Hay 192 canicas repartidas en un número determinado de bolsas. Si el número de canicas excede en 4 al número de bolsas, ¿cuántas canicas contiene cada bolsa y cuántas bolsas son en total?
4. Usando la fórmula general, calcula las siguientes raíces de las ecuaciones cuadráticas y comprueba los resultados.

a) $-2x^2 + 6x + 8 = 0$	c) $3x^2 + 3x - 90 = 0$
b) $-6x^2 + 6x = -12$	d) $-x^2 + 6x + 7 = 0$

5. Un capital $C = \$100000$ se transforma en $A = \$115562.50$ después de una inversión de 2 años. ¿Qué tasa r de interés se aplicó a la inversión?



$$A = C(1 + r)^2$$

6. Calcula las raíces de las ecuaciones cuadráticas y explica lo que sucede en cada caso.

a) $x^2 - x - 6 = 0$ b) $x^2 + 2x + 1 = 0$ c) $x^2 + 4x + 13 = 0$

7. Raúl es 2 años mayor que Adriana y la suma de los cuadrados de las edades es de 580. ¿Cuáles son las edades de Raúl y Adriana?
8. La suma de un número con su recíproco es igual a $\frac{10}{3}$ ¿Cuál es el número y cuál es su recíproco?

Seleccionen algunos problemas y discutan la solución en grupo.

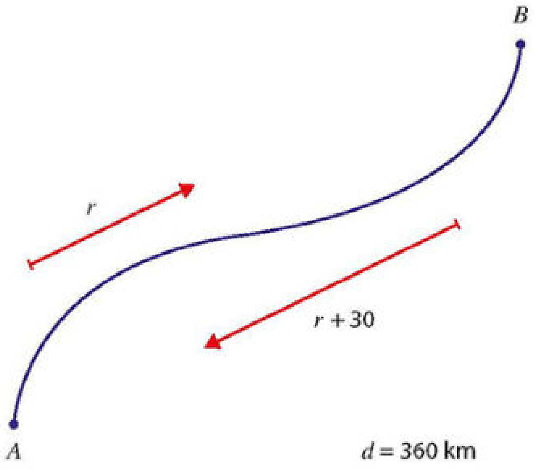
Un problema con la rapidez

Irma le solicitó ayuda al maestro Roberto para resolver un problema que le planteó su papá, Juan José, quien trabaja como trailero.

Juan José le dijo:

A ver hija, ya que estudias álgebra en la secundaria, dime cómo puedo saber si mi amigo Pedro tenía razón en lo que dijo el otro día.

Pedro tardó cierto tiempo para ir de A a B, recorriendo 360 km. De regreso pensó que tendría que aumentar la rapidez en 30 km/h para tardar 2 horas menos en ir de B a A ¿Cuánto tiempo de ida y cuánto de regreso hizo Pedro en su recorrido?



Completa el procedimiento sugerido para resolver el problema anterior.

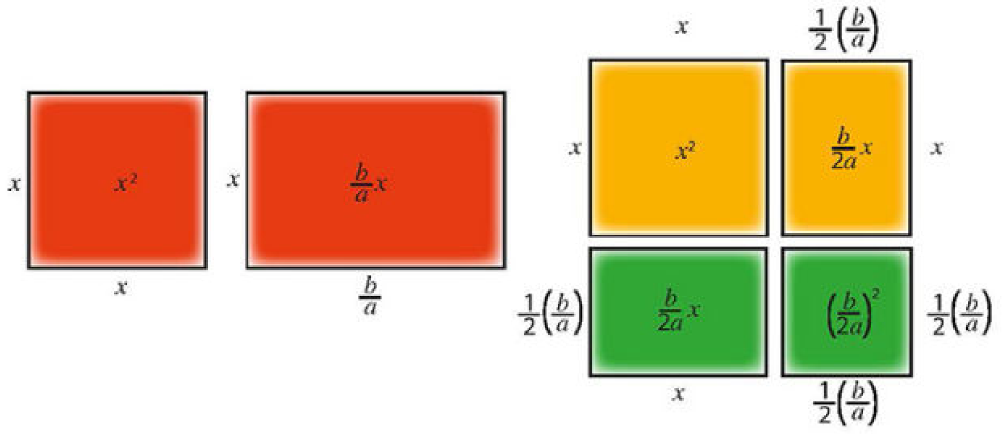
1. ¿Recuerdas la fórmula de la rapidez?
2. ¿Cuál es la distancia que recorrió Pedro de ida?
3. ¿Cómo se sustituye el valor de la distancia en la fórmula de la rapidez?
4. ¿Cuál sería la rapidez de regreso si se aumentara 30 km/h?
5. ¿Cómo se puede justificar la igualdad $\frac{360}{t} + 30 = \frac{360}{t-2}$, en la que $t \neq 0$ y $t \neq 2$?
6. Para resolver esta ecuación:
   a) Multiplica los dos miembros de la ecuación por t
   b) Después multiplica por $t - 2$
   c) Realiza las operaciones, reduce los términos semejantes
   d) Obtén una ecuación cuadrática en la forma estándar
7. Aplica la fórmula general para calcular las raíces de la ecuación cuadrática
8. ¿Cuánto tiempo tardó Pedro en la ida?, ¿y en el regreso?
9. ¿Qué rapidez empleó de subida y cuál iba a usar de bajada?

Planteen problemas semejantes al de este apartado y soliciten a otros compañeros que los resuelvan y viceversa.

Soliciten al profesor que organice una actividad grupal para explicar cada paso del procedimiento para obtener la fórmula general de las ecuaciones cuadráticas.

1. La ecuación cuadrática que se debe resolver es $ax^2 + bx + c = 0$
2. Se divide entre a: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
3. Ahora se puede obtener $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$
4. Se usan las figuras que aparecen a continuación para completar el siguiente trinomio cuadrado perfecto:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$



5. Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

6. Se realizan las operaciones indicadas:

$$\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}$$

7. Se extrae la raíz cuadrada:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

8. Y por último, se realizan las operaciones correspondientes.

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Analiza cada enunciado y contesta lo que se solicita.

1. El costo total de una excursión es de \$720 000.00. Si cuatro de las personas inscritas ya no asistirán, cada una de las restantes tendrá que pagar \$2 000.00 más. ¿Cuántas personas irán a la excursión y cuánto pagará cada una?
2. Usando la sucesión de números 1, 2, 3, 4, 5,..., así como la fórmula $y = 2n^2 + 4$, Arturo obtuvo una nueva sucesión de números.

n	1	2	3	4	5		
$y = 2n^2 + 4$	6	12	22	36			1062

¿Cuál es el número que corresponde a la quinta posición?

¿Qué posición ocupa el número 1 062?

3. Calcula las raíces de la ecuación cuadrática incompleta pura $ax^2 + c = 0$, mediante tres procedimientos diferentes:

   a) Propiedad de la raíz cuadrada
   b) Factorización
   c) Fórmula general

Verifica que las raíces calculadas sean iguales al aplicar todos los procedimientos.

4. La altura h que alcanza un objeto lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de v metros por segundo y durante un tiempo de t segundos se puede calcular con la fórmula:

$$h = -\frac{1}{2}gt^2 + vt$$

Escribe la fórmula como una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y despeja la variable t.

Habilidades digitales

Realiza una búsqueda en internet acerca de la fórmula general de las ecuaciones cuadráticas; puedes comenzar ingresando a la siguiente dirección electrónica:
www.montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE_TEXT_RESOURCE/U10_L1_T3_text_final_es.html
(Consulta: 12 de enero de 2015).
Estudia la sección de teoría, posteriormente selecciona y resuelve tres ejercicios de la sección de problemas. Por último, valida tus respuestas con un compañero.

Bloque TRES

Figuras y cuerpos

Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas

ACTIVIDADES INICIALES

Distancias inaccesibles

Glosario

distancia inaccesible. Distancia que no se puede medir de manera directa.

Conrado y Selene aplican sus conocimientos sobre triángulos para calcular la distancia que separa a 2 piedras que se ubican en las orillas de un río.

La distancia que se pretende medir es $\overline{PQ}$ y resulta ser una **distancia inaccesible**.

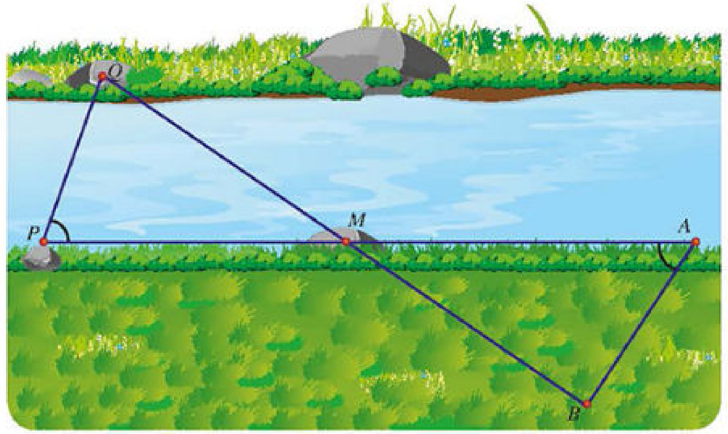
Conrado se ubica en el punto P, mide el ángulo $\sphericalangle P$; luego avanza por la orilla del río y mide el segmento $\overline{PM}$.

$\sphericalangle P = 80°$ $\quad \overline{PM} = 15m$

Prolonga $\overline{PM}$ hasta el punto A para lograr que $\overline{MA} = \overline{PM}$.

Construye el ángulo $\angle A$ de tal manera que $\angle P = \angle A$. Avanza por el segundo lado del ángulo hasta que los puntos Q, M y B se alinean.

Selene utiliza un procedimiento parecido al anterior, excepto que el punto A lo determina de tal manera que $\overline{MA} = \frac{1}{2}(\overline{PM})$.



Reproduzcan en sus cuadernos los procedimientos de Conrado y Selene para que realicen las siguientes actividades.

1. ¿Cómo obtuvo Conrado la solución del problema?
2. ¿Qué características de los triángulos se aplican en el procedimiento de Selene?
3. ¿Se llega al mismo resultado con ambos procedimientos?

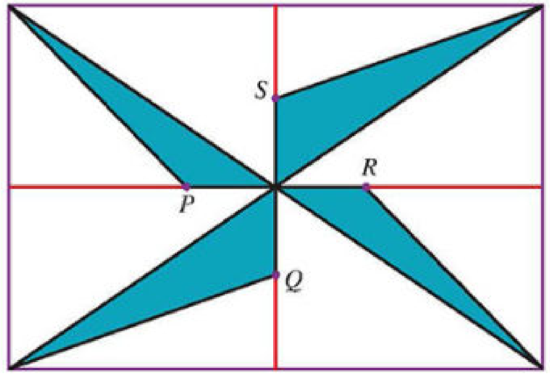
Comparen y justifiquen cada una de sus respuestas.

CONSTRUYO MIS CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES

Aplicaciones de los criterios de congruencia de triángulos

Eloísa diseña carpetas empleando figuras geométricas.

¿Cuál es el procedimiento que siguió Eloísa para diseñar una hélice como la de la figura de la derecha?

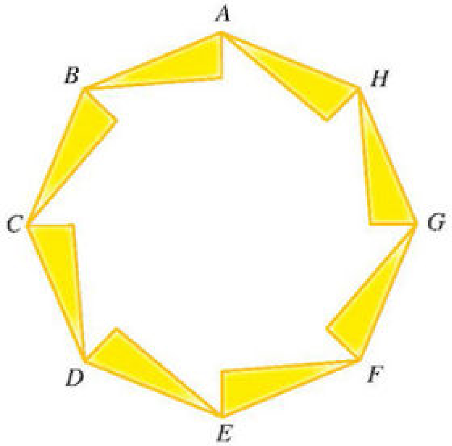


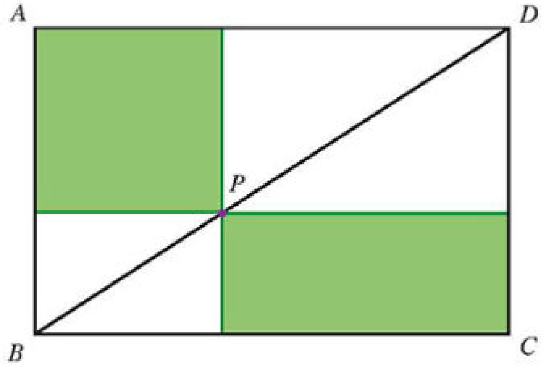
Traza en tu cuaderno una hélice como la de Eloísa y describe el procedimiento.

Expliquen por qué todos los triángulos que forman la hélice son congruentes.

Analiza las siguientes afirmaciones y justifícalas.

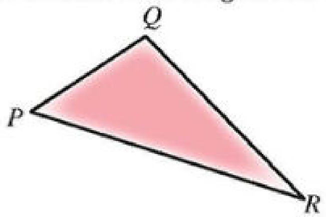
1. Los triángulos que se recortan de un octágono regular para construir una sierra son congruentes.
2. Los rectángulos coloreados tienen la misma área.





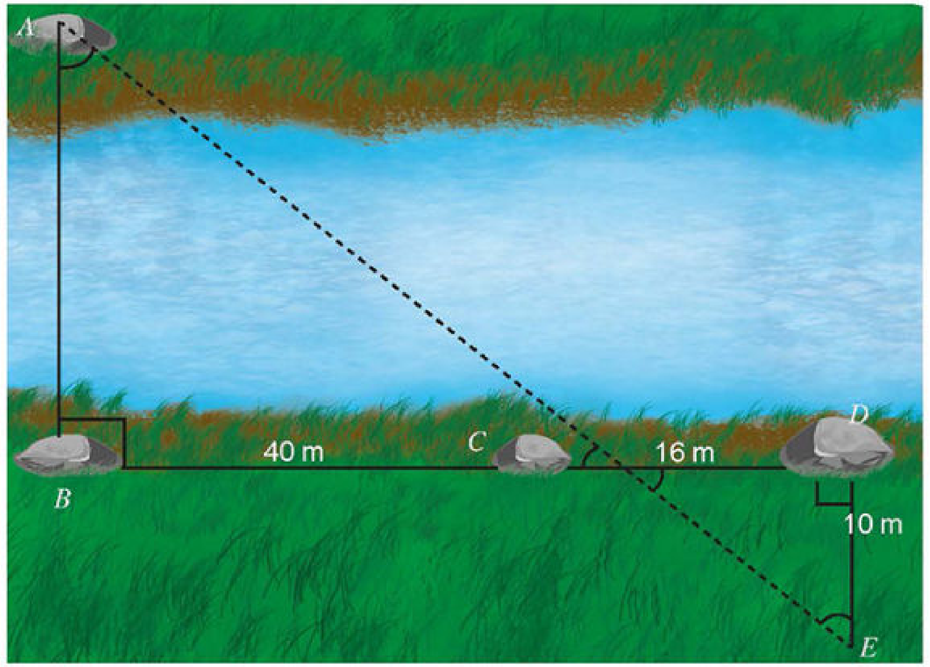
Tracen un triángulo que sea congruente con el $\triangle PQR$. Apliquen tres procedimientos diferentes para localizar el vértice S, de tal manera que se forme un cometa.

Justifiquen los procedimientos con los criterios de la congruencia de triángulos.



Aplicaciones de la semejanza de triángulos

Después de estudiar la semejanza de triángulos, Abelardo pretende resolver el siguiente problema.



Para calcular el ancho del río, se utilizó una roca como punto A y otra como punto B, procurando que $\overline{AB}$ fuera perpendicular a la orilla.

Entonces, $\overline{AB} = x$ era la distancia que debía medir, pero no lo podía hacer directamente.

Así que localizó el punto C sobre la orilla del río y midió el segmento $\overline{BC} = 40$ m, avanzó hasta el punto D y midió $\overline{CD} = 16$ m. En el punto D, trazó un ángulo recto y localizó el punto E de tal manera que A, C y E estuvieran alineados. Midió el segmento $\overline{DE} = 10$ m.

¿Puedes resolver el problema de Abelardo con estos datos?

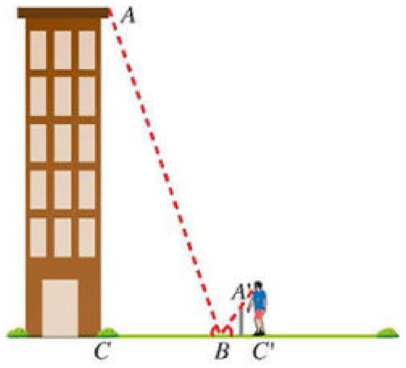
Abelardo indicó con la misma señal los ángulos congruentes de los triángulos ΔABC y ΔEDC. Con esta señal indicó que los dos ángulos eran rectos.

Con la señal ∢ indicó dos ángulos iguales por ser opuestos por el vértice. Después colocó ∢ en los otros ángulos que también eran iguales. ¿Por qué?

Para saber cuáles lados eran homólogos, se fijó en que fueran opuestos a ángulos iguales. $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ eran homólogos y también que $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, $\overline{AC}$ y $\overline{CE}$ eran las otras parejas de lados similares. Estableció la proporción $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}$ cuidando que cada razón se formara con lados homólogos.

Sustituye los datos conocidos y termina de resolver el problema de Abelardo.

Tales de Mileto usó un espejo y una estaca para medir alturas inaccesibles.



Se resolverá el siguiente problema usando este método: calcula la altura $\overline{CA}$ del edificio, usando una estaca $\overline{C'A'} = 1.5$ m y un espejo.

Se coloca el espejo en el punto B, de tal manera que $\overline{BC} = 6$ m.

Se coloca la estaca verticalmente en diferentes posiciones hasta que en el espejo se pueda ver el extremo del edificio. En ese momento se medirá $\overline{BC'} = 1$ m.

Se completa entonces el trazo de los triángulos ΔABC y $\Delta A'BC'$.

Los ángulos $\angle ABC$ y $\angle A'BC'$ son congruentes debido a la **propiedad de reflexión** en un espejo.

Glosario

propiedad de reflexión. Se presenta cuando el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

¿Se puede establecer la semejanza entre los triángulos ΔABC y $\Delta A'BC'$?

Se establece la proporción: $\boxed{\frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BC'}}}$

Utiliza la información que se encuentra a continuación para resolver el problema de la altura del edificio.

Sustituye los datos $\overline{C'A'} = 1.50$ m, $\overline{BC'} = 1$ m, $\overline{BC} = 6$ m y realiza lo siguiente:

$$\frac{x}{1.50} = \frac{6}{1} \qquad x = (1.50)(6) = 9$$

La altura del edificio es de $\overline{CA} = 9$ m.

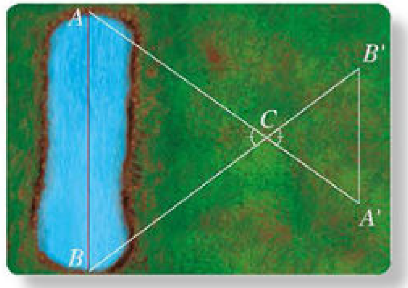
Aplico

Usa el método de la estaca y el espejo para calcular la altura de un edificio de tu localidad.
Presenta tus resultados a tu profesor para su validación.

Comunico

Vicente pretende encontrar la longitud $\overline{AB}$ del lago que aparece en la siguiente imagen. Para lograrlo, trazó esta figura y midió los segmentos.

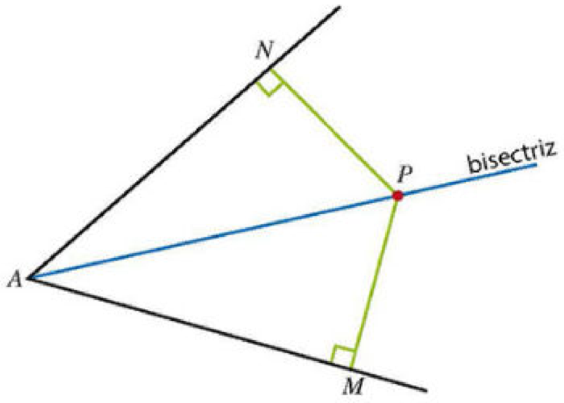
$\overline{AC} = 120$ m
$\overline{BC} = 110$ m
$\overline{CA'} = 48$ m
$\overline{CB'} = 44$ m
$\overline{A'B'} = 34$ m



Resuelve el problema de Vicente y explícale a tus compañeros qué criterio de semejanza de triángulos usaste.

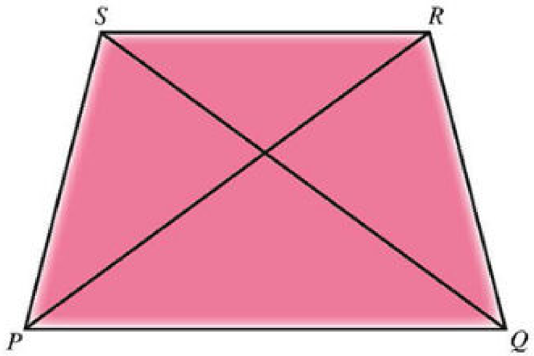
Analicen cada situación y apliquen los criterios de congruencia y semejanza para hacer lo que se solicita en cada caso.

1. Tracen un ángulo $\angle A$, tracen la bisectriz de $\angle A$ y seleccionen un punto P de dicha bisectriz.

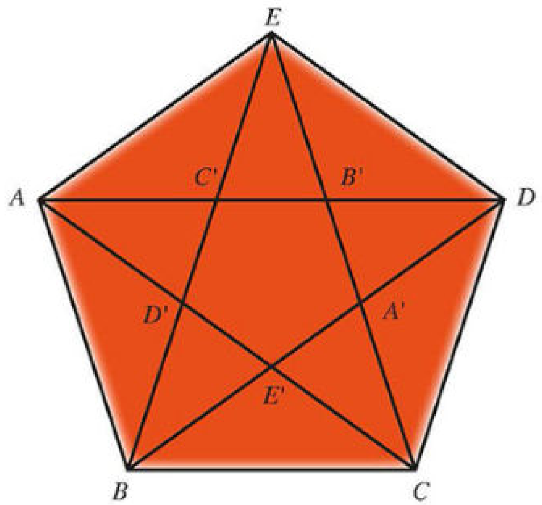


¿Cómo se pueden medir las distancias del punto P a cada uno de los lados de $\angle A$?

Analicen, describan y justifiquen la propiedad que tienen los puntos de la bisectriz de un ángulo.



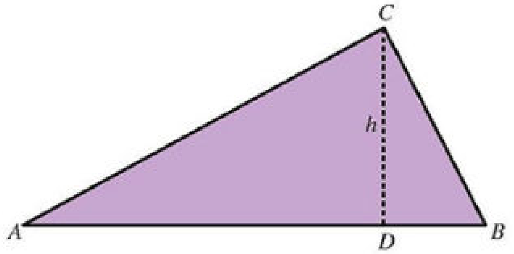
2. Tracen un trapecio isósceles y sus diagonales. Justifiquen por qué las diagonales son iguales.



3. Describan todas las parejas de polígonos congruentes y semejantes que se forman con un pentágono y sus diagonales.

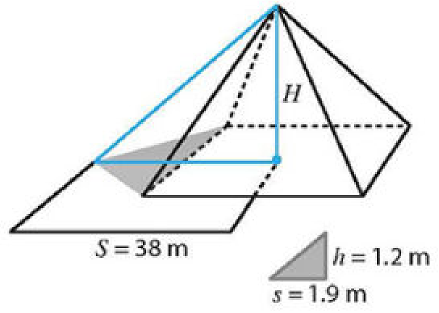
Justifico

Justifica la siguiente afirmación: "El trazo de la altura de un triángulo rectángulo divide a éste en dos triángulos semejantes".

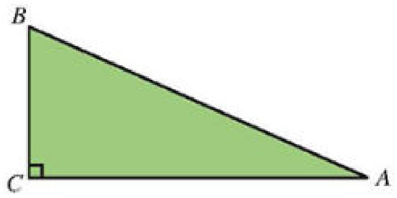


Analiza cada situación para que obtengas la solución correspondiente.

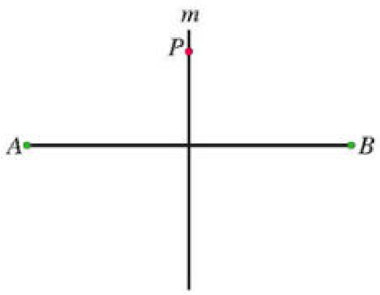
1. Calcula la altura de la pirámide sabiendo que ésta proyecta una sombra $S = 38$ m, al mismo tiempo que una estaca de altura $h = 1.2$ m proyecta una sombra de longitud $s = 1.9$ m.

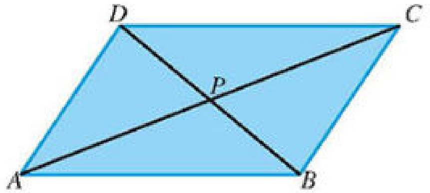


2. Traza y recorta un triángulo rectángulo como el de abajo. Después recórtalo en cuatro triángulos que sean semejantes, pero que no sean congruentes.



3. Justifica la siguiente afirmación: "Un punto P en la mediatriz de un segmento $\overline{AB}$ equidista de los extremos".





4. Describe las parejas de triángulos congruentes que contiene la figura de la izquierda.

Presenta tus respuestas al profesor para que las valide.

Habilidades digitales

Para que resuelvas otros problemas sobre semejanza de triángulos, lleva a cabo una búsqueda en internet; puedes comenzar en la siguiente dirección electrónica:
www.profesorenlinea.cl/geometria/Semejanza_figuras_planas.html
(Consulta: 12 de enero de 2015).
Comparte los resultados con tus compañeros y profesor.

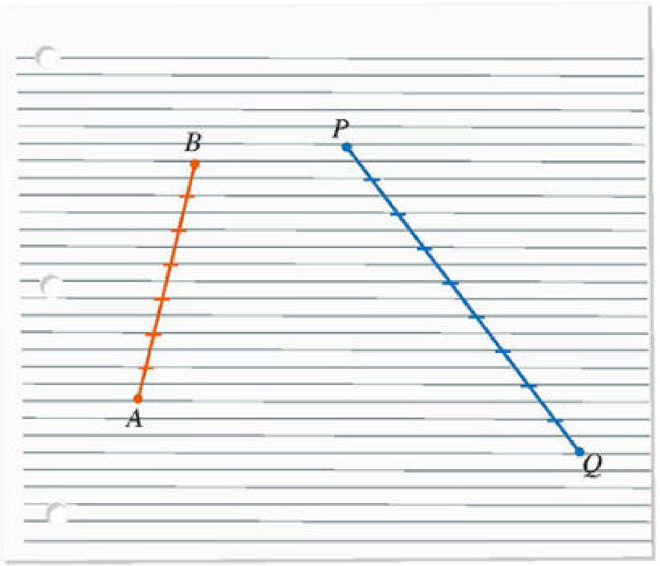
Figuras y cuerpos

Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales

ACTIVIDADES INICIALES

División de un segmento en n partes iguales

Rosaura y Saúl usan los renglones de su cuaderno para dividir segmentos en partes iguales.



Analiza la figura que obtuvieron Saúl y Rosaura, y realiza el procedimiento que se indica a continuación.

1. Verifica si el segmento $\overline{AB}$ quedó dividido en siete partes iguales.
2. Explica el procedimiento que usaron Rosaura y Saúl para dividir el segmento $\overline{PQ}$ en 9 partes iguales.
3. Traza el segmento $\overline{MN}$ y usa tu cuaderno para dividirlo en 8 partes iguales.

M ———————————— N

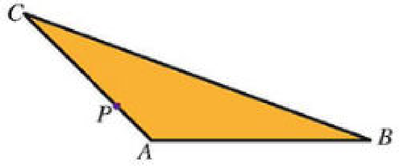
4. Describe la forma en que se puede usar el procedimiento anterior para dividir un segmento $\overline{CD}$ en n partes iguales.
5. Explica las razones por las que el procedimiento funciona para dividir un segmento cualquiera en n partes iguales.

Comparen las respuestas que obtuvieron y verifiquen que sean correctas.

CONSTRUYO MIS CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES

Proporcionalidad en el triángulo

¿Qué relación hay entre los triángulos que se obtienen mediante el siguiente procedimiento?



1. Trazar un triángulo $\triangle ABC$.
2. Escoger un punto P en el lado $\overline{CA}$.
3. Trazar un segmento $\overline{PQ}$ que sea paralelo al lado $\overline{AB}$ y tal que Q sea un punto del lado $\overline{BC}$.
4. Comparar los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle PQC$.

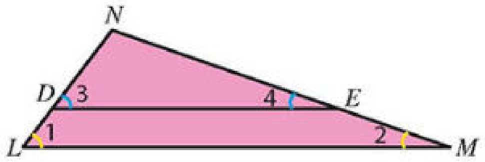
Pienso

Elabora una conjetura sobre la relación que hay entre los dos triángulos. Haz otras construcciones parecidas, comenzando con un triángulo diferente cada vez. Verifica que se cumpla tu conjetura.

Comenta tus resultados con algunos compañeros.

Lean, analicen, completen y justifiquen la proporcionalidad que se presenta en un triángulo cuando se traza una recta paralela a uno de sus lados.

$\overline{DE}$ es un segmento paralelo al lado $\overline{LM}$ del triángulo $\triangle LMN$.



1. ¿Por qué se cumplen las siguientes igualdades?

$$\measuredangle 1 = \measuredangle 3 \text{ y } \measuredangle 2 = \measuredangle 4$$

2. Expliquen por qué los triángulos $\triangle LMN$ y $\triangle DEN$ son semejantes.
3. Ahora completen y describan las igualdades.

$$\frac{\overline{LN}}{\overline{DN}} = \frac{\overline{MN}}{} \qquad \frac{\overline{LD} + \overline{DN}}{\overline{DN}} = \frac{+\overline{EN}}{\overline{EN}}$$

$$\frac{\overline{LD}}{\overline{DN}} + 1 = \frac{}{\overline{EN}} + 1 \qquad \frac{}{\overline{DN}} = \frac{\overline{ME}}{\overline{EN}}$$

4. Analicen la siguiente propiedad de los triángulos y sustenten su relación con la proporción anterior.

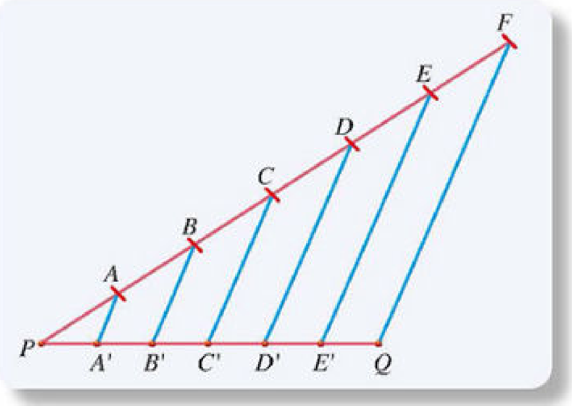
La proporcionalidad en el triángulo se presenta cuando una recta paralela a un lado de un triángulo interseca a los otros dos lados en dos puntos diferentes, entonces divide estos lados en segmentos con longitudes proporcionales.

Comunico

Realiza un escrito donde describas los procedimientos que aplicaste junto con tu compañero en la actividad anterior. Preséntalo al profesor para su validación.

¿Cuál es el enunciado del teorema de Tales?

Lean, analicen, completen y comparen los planteamientos geométricos que se presentan en dos contextos diferentes. Reprodúzcanlos en sus cuadernos.



1. División de un segmento en n partes iguales.

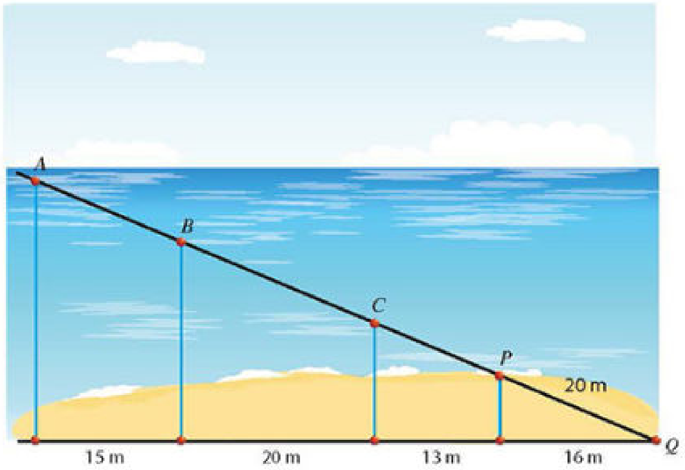
¿Cómo se puede dividir el segmento $\overline{PQ}$ en seis partes iguales?

a) Se traza un ángulo con vértice en P.
b) Comenzando en P, se usa el compás para marcar 6 segmentos iguales sobre la recta.
c) Unimos el extremo F del sexto segmento con el punto Q.
d) Por cada uno de los puntos A, B, C, D y E se trazan rectas paralelas a $\overline{FQ}$.
e) Éstas dividen al segmento $\overline{PQ}$ en 6 partes iguales.

Describe un procedimiento general para dividir un segmento $\overline{MN}$ en n partes iguales.

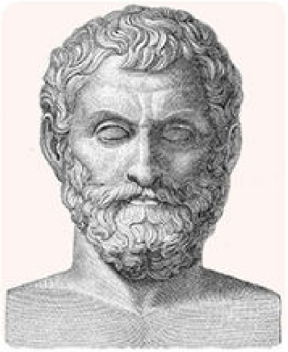
2. Medición indirecta de distancias.

¿Cómo se puede calcular la longitud de las distancias entre las boyas A, B, y C sin necesidad de meterse al mar?



a) Saúl se paró en el punto P y observó que las boyas estaban alineadas en los puntos A, B, y C.
b) Sobre una línea recta avanzó 20 m hasta ubicarse en el punto Q.
c) Trazó una recta en la playa.
d) Desde cada uno de los puntos A, B, C y P, trazó líneas paralelas para determinar puntos, sobre la playa. Midió las longitudes de los segmentos formados por los puntos de intersección.
e) Ahora calculen las longitudes de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$; además expliquen el procedimiento que siguió Saúl.

Presenten sus resultados al profesor y soliciten que los valide.



Tales de Mileto, considerado uno de los siete sabios de la antigüedad, usó sus conocimientos matemáticos para demostrar la siguiente propiedad geométrica: "Los segmentos determinados por una serie de paralelas que cortan a dos transversales son proporcionales".

A esta propiedad geométrica se le conoce como teorema de Tales.

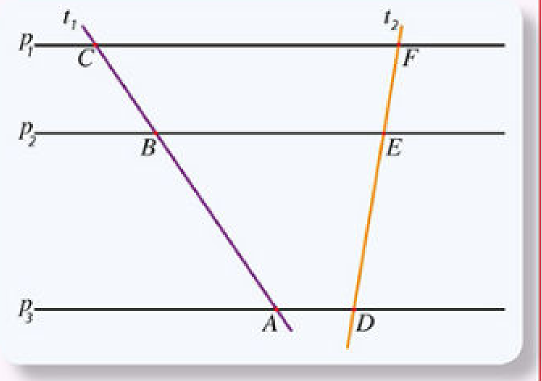
Lee y explícale a un compañero el enunciado del teorema de Tales.

Enunciado del teorema de Tales

Si tres o más rectas paralelas intersecan a dos rectas transversales, entonces, los segmentos determinados en dichas transversales son proporcionales.

Si las rectas paralelas, p_1, p_2 y p_3 intersecan a las rectas transversales t_1 y t_2 en los puntos A, B, C y D, E, F, respectivamente, entonces se cumple la proporción.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$$



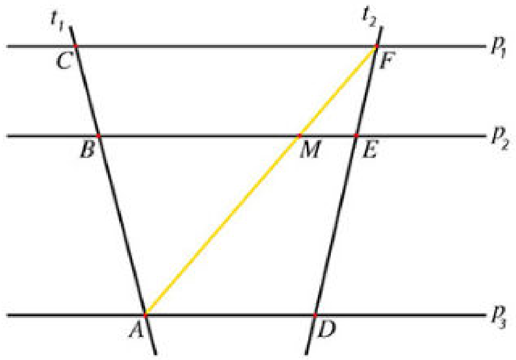
Para que comprendan mejor el teorema de Tales, realicen lo que se solicita a continuación.

1. Tracen el segmento $\overline{AF}$ para determinar los triángulos $\triangle ADF$ y $\triangle AFC$.
2. Apliquen la proporcionalidad en el triángulo para justificar las igualdades

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MF}} \qquad \frac{\overline{AM}}{\overline{MF}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$$

3. Ahora justifiquen la igualdad:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$$



Comenten en pareja la justificación del teorema de Tales.

Traza otras figuras parecidas, pero con literales diferentes, y empléalas para describir la proporción que se cumple al aplicar el teorema de Tales. Presenta tu trabajo al profesor para su validación.

Aplicaciones del teorema de Tales

La solución de las siguientes situaciones requiere utilizar el teorema de Tales.

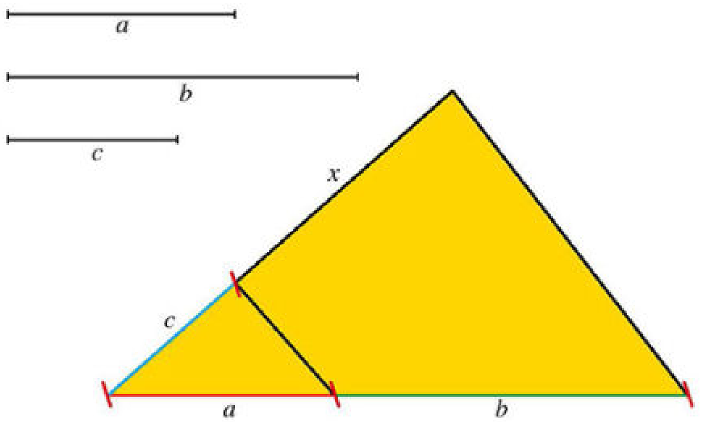
Pienso

¿Cómo se puede trazar un segmento cuya longitud sea la **cuarta proporcional** de tres segmentos dados?
¿Qué condición debe cumplir la cantidad x para ser la cuarta proporcional de las cantidades a, b y c?

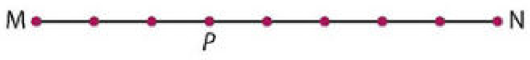
Analiza y completa lo que falta en cada contexto.

1. Usa la siguiente figura para explicar el procedimiento geométrico que se puede aplicar para obtener la cuarta proporcional de tres segmentos de longitud conocida.

   Haz las mediciones y los cálculos necesarios para verificar que se cumple la proporcionalidad $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.



2. División de un segmento en una razón dada. ¿Cómo se puede dividir el segmento $\overline{MN}$ en dos partes que cumplan la razón $\frac{3}{5}$?



Describe y explica el procedimiento usado para obtener el punto P y verifica que se cumple la proporcionalidad $\frac{MP}{PN} = \frac{3}{5}$.

Generalizo

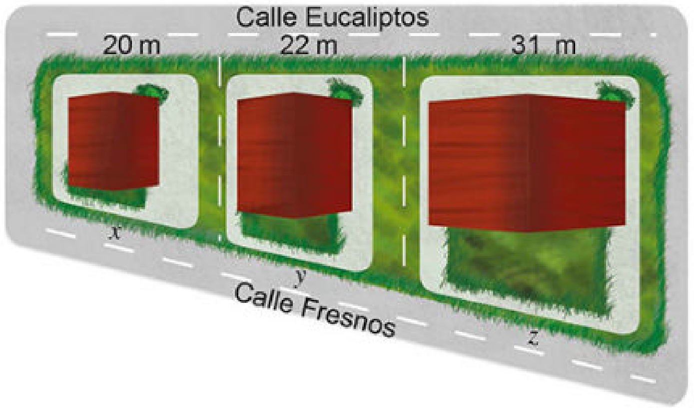
Describe un **algoritmo** que sirva para dividir un segmento AB en dos partes que cumplan la razón $\frac{m}{n}$.

Glosario

cuarta proporcional. Considera que la cuarta proporcional de tres cantidades es la cantidad que forma el cuarto término de una proporción, cuyos otros tres términos son cantidades conocidas tomadas en orden.

algoritmo. Conjunto ordenado de operaciones que permite resolver un problema.

Aplicación en la vida cotidiana



Tres terrenos se ubican entre las calles Eucaliptos y Fresnos de la colonia Bosques de México.

Los límites laterales de los terrenos son segmentos perpendiculares a la calle de Eucaliptos.

Si el frente total sobre la calle Fresnos es de 96 m, calcula la longitud del frente de cada terreno.

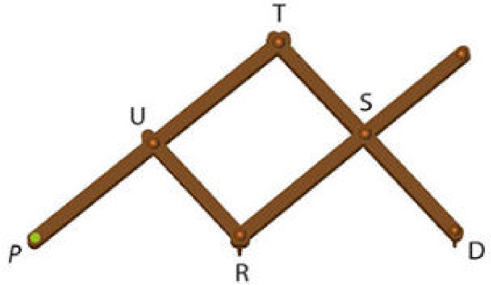
$x =$ $y =$ $z =$

Aplicación en el dibujo. Uso del pantógrafo

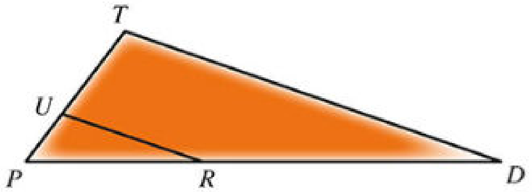
El **pantógrafo** tiene un clavo en un punto P que sirve para fijarlo sobre la mesa de trabajo. Si el punto R sigue los detalles de la figura que se desea dibujar, entonces un lápiz colocado en el punto D reproduce la figura ampliada o reducida.

Glosario

pantógrafo. Es un instrumento que se usa para ampliar figuras.



Usa el triángulo $\triangle PTD$ y el teorema de Tales para explicar el funcionamiento del pantógrafo. ¿Qué sucede con la razón $\frac{PR}{RD}$?



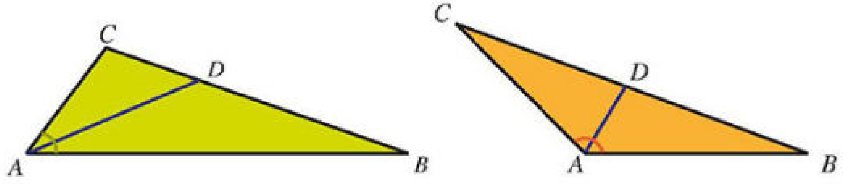
Actividad extraclase

Adquiere o elabora un pantógrafo, y úsalo para explicar el uso del teorema de Tales en la construcción de instrumentos de dibujo.

Propiedad de la bisectriz de un ángulo interior de un triángulo

Con el propósito de conocer la proporcionalidad que se presenta cuando se traza la bisectriz de un ángulo interior de un triángulo, realiza las siguientes actividades.

1. Traza varios triángulos diferentes.



2. Escoge un ángulo en cada triángulo y traza su bisectriz $\overline{AD}$.

3. Mide la longitud de los segmentos en que se dividió el lado opuesto al ángulo seleccionado y calcula las razones que se pueden formar con las cantidades obtenidas.

$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$ = ____________ $\frac{\overline{DC}}{\overline{BD}}$ = ____________

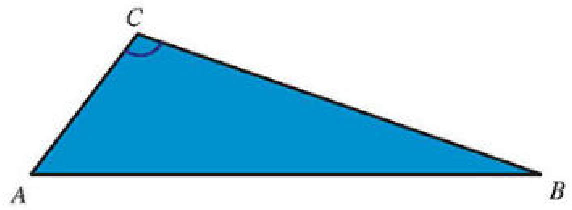
4. Compara las razones anteriores con las que se pueden obtener al considerar las longitudes de los lados que forman el ángulo seleccionado.

$\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}}$ = ____________ $\frac{\overline{CA}}{\overline{AB}}$ = ____________

5. Explica en un escrito la propiedad que tiene la bisectriz de un ángulo interior.

6. Con ayuda de los pasos que se indican a continuación y usando la proporcionalidad, plantea un procedimiento que pueda ser empleado para trazar la bisectriz de un ángulo.

   a) Determina un punto D en el lado $\overline{AB}$
   b) Traza el segmento $\overline{CD}$
   c) Verifica que $\overline{CD}$ sea la bisectriz del ángulo C

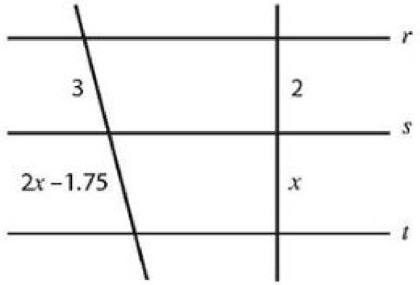


Presenta tus resultados al profesor para que los revise y valide.

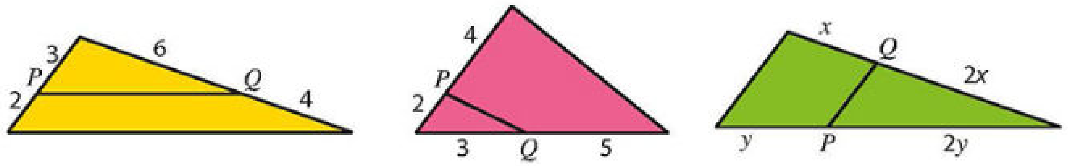
Resuelve las situaciones geométricas que implican el uso del teorema de Tales y justifica cada una de tus respuestas.

1. Usa regla y compás para dividir el segmento $\overline{PQ}$ en 2 partes, cuyas longitudes cumplan con la razón $\frac{4}{3}$.

2. Si r, s y t son rectas paralelas, calcula el valor de x.



3. ¿Para cuáles de los triángulos se puede concluir que la recta $\overline{PQ}$ es paralela a uno de los lados del triángulo?



4. Justifica la siguiente afirmación:

Un segmento $\overline{LM}$, cuyos puntos extremos, L y M son los puntos medios de dos lados de un triángulo, resulta ser paralelo al tercer lado del triángulo $\triangle PQR$ además, la longitud de $\overline{LM}$ es la mitad de la longitud del tercer lado.

Habilidades digitales

Con el propósito de que conozcas otras aplicaciones del teorema de Tales, realiza una búsqueda en internet; puedes comenzar ingresando a la siguiente dirección electrónica:
http://didactalia.net/gl/comunidade/materialeducativo/recurso/teorema-de-thales/d0bcb518-8aa3-47e7-9aec-de98abbc7022
(Consulta: 17 de enero de 2015)

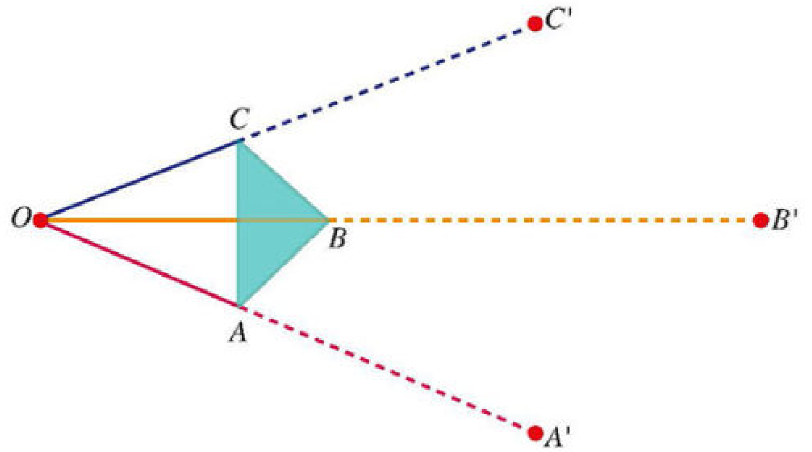
Figuras y cuerpos

Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas

ACTIVIDADES INICIALES

Ligas que se estiran proporcionalmente

Para iniciar con el estudio de las aplicaciones de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas, analicemos la figura que se encuentra a continuación.



Para trazar la figura anterior, Hilda y Bulmaro escogieron un punto O del plano geométrico y colocaron los extremos de varias ligas, de diferentes colores y longitudes, en dicho punto. Éstas determinaron los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$. Los puntos A, B y C son los vértices del triángulo $\triangle ABC$. Enseguida usaron el valor $k = 2.5$ para estirar proporcionalmente cada una de las ligas sujetas al punto O.

Reproduce la figura y determina la relación que hay entre las parejas de segmentos.

$\overline{OA}' = 2.5\,(\overline{OA})$ $\qquad$ $\overline{OB}' = 2.5\,(\overline{OB})$ $\qquad$ $\overline{OC}' = 2.5\,(\overline{OC})$

Analicen las figuras de Hilda y Bulmaro, y respondan las siguientes preguntas:

1. ¿Qué pueden afirmar acerca de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$?
2. ¿Cómo pueden justificar cada una de sus afirmaciones?

Analicen sus respuestas y elaboren una definición para la expresión "figuras homotéticas".

Actividad extraclase

Para que fortalezcas tu aprendizaje acerca de la semejanza y las figuras homotéticas, te sugerimos consultar el tema "Amplía y reduce figuras" en el libro *Apuntes de matemáticas* de Carmen Burgués, Roser Codina y Manuel Montanuy. Mismo que está disponible en tu Biblioteca de Aula o Escolar (Libros del Rincón).

Con base en las figuras semejantes que usaron los autores del libro *Apuntes de matemáticas*, describan qué figuras homotéticas podrían obtener.

CONSTRUYO MIS CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES

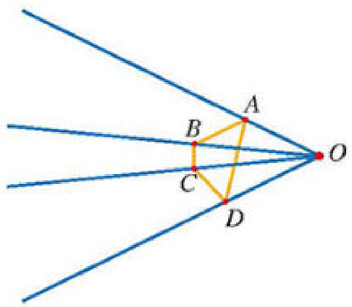
¿Qué es una homotecia?

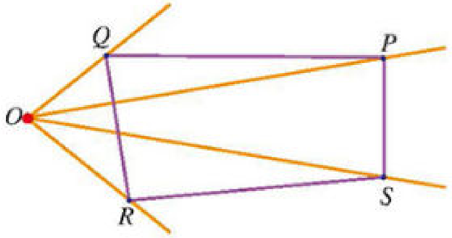
Para trazar figuras semejantes, usen los valores indicados para el **factor de homotecia**; reproduzcan la transformación que sufre la figura y determinen si se trata de una **ampliación**, una **reducción** o una **congruencia**.

1. Tracen la figura $A'B'C'D'$ de tal manera que:

$$\overline{OA}' = k\,(\overline{OA})$$
$$\overline{OB}' = k\,(\overline{OB})$$
$$\overline{OC}' = k\,(\overline{OC})$$
$$\overline{OD}' = k\,(\overline{OD})$$

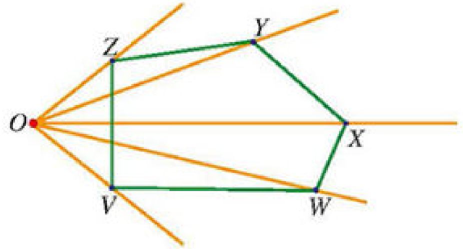
para $k = 1.8$.





2. ¿Qué figura se obtiene para $k = 0.6$?

3. ¿Qué sucede cuando $k = 1$?



Glosario

ampliación. Reproducción de una figura que aumenta proporcionalmente todas sus dimensiones.

congruencia. Reproducción de una figura que conserva su forma y tamaño.

factor de homotecia. Valor k que se aplica a cada longitud de una figura, para la obtención de una figura homotética.

homotecia. Transformación de figuras geométricas en el plano que permite obtener un polígono semejante a un polígono conocido.

reducción. Reproducción de una figura que disminuye proporcionalmente todas sus dimensiones.

Pienso

¿Cómo se puede verificar que las figuras obtenidas mediante una **homotecia** siempre son semejantes a las originales?

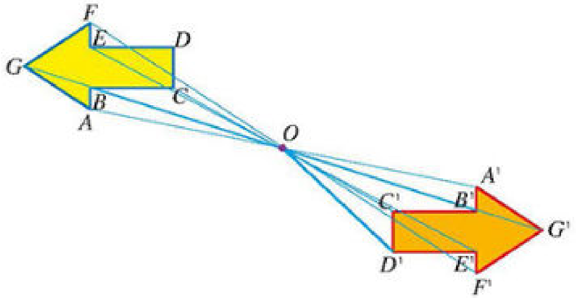
Completa la siguiente definición de homotecia.

Homotecia

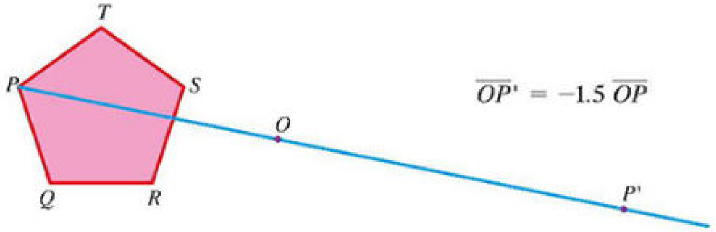
Es la transformación determinada por un punto central O y un factor de conversión k; de tal manera que a cada punto P del plano le corresponde otro punto P' en la semirrecta $\overline{OP}$ que cumple la igualdad $\overline{OP}' =$ ______.

Para que comprendan el concepto de homotecia inversa, completen, analicen y expliquen lo que sucede en cada transformación.

1. $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -1 \quad \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = -1 \quad \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} = -1$

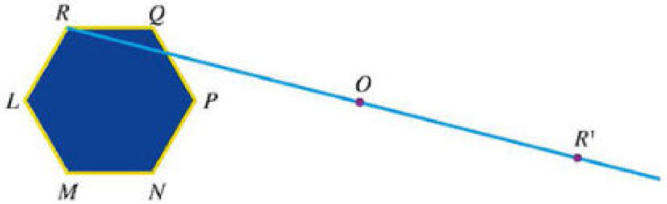


2. $\overline{OP'} = -1.5(\overline{OP})$, $\overline{OQ'} = -1.5(\overline{OQ})$, $\overline{OR'} = -1.5(\overline{OR})$, etcétera.



$\overline{OP'} = -1.5\ \overline{OP}$

3. Para $k = -0.7$.



4. Con base en los ejercicios previos, redacten su propia definición de homotecia inversa.

Comprendo

Determina los valores del factor de homotecia k de acuerdo con el resultado que se obtiene en cada una de las siguientes transformaciones:

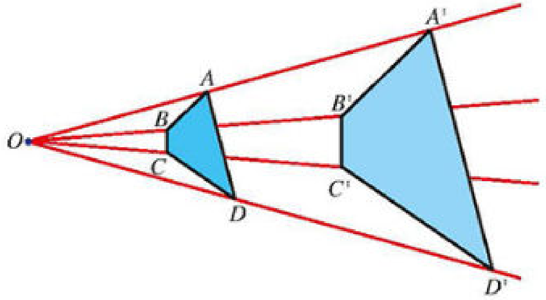
a) Congruencia directa
b) Congruencia inversa
c) Ampliación directa
d) Ampliación inversa
e) Reducción directa
f) Reducción inversa

¿Cuáles son las características de las figuras homotéticas?

Eugenio y Teresa han trazado las figuras homotéticas $ABCD$ y $A'B'C'D'$ con respecto al centro O.

Analiza la imagen de la derecha y elabora una definición de figuras homotéticas con respecto a un punto O.

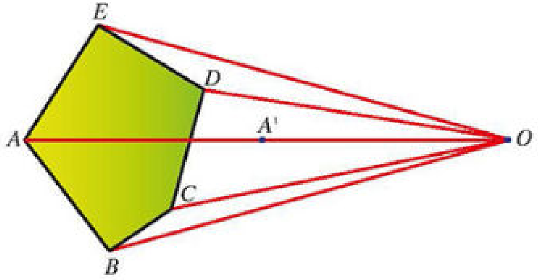
Traza un par de figuras homotéticas con respecto a un centro O, calcula el valor de las siguientes razones y escribe una conclusión al respecto.

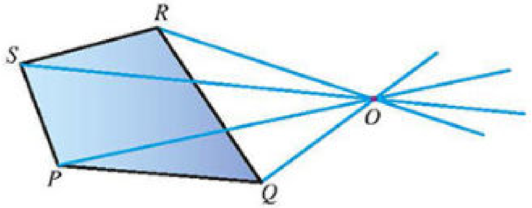


$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \quad \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} \quad \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} \quad \frac{\overline{OD'}}{\overline{OD}}$

Analiza la información que se proporciona en los siguientes casos y completa el trazo de figuras homotéticas.

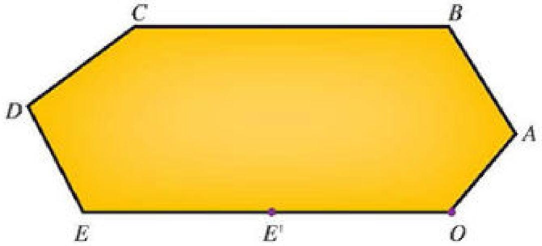
1. El factor de homotecia k se obtiene de la proporción existente entre los segmentos OA y OA'.





2. $k = -\frac{1}{2}$

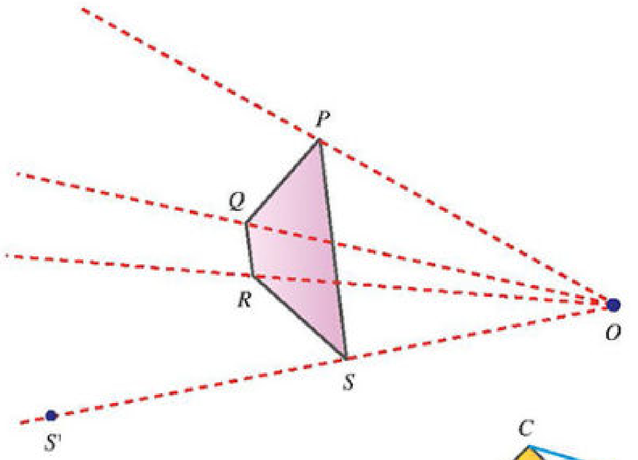
3. El factor de homotecia k se obtiene de la siguiente figura.

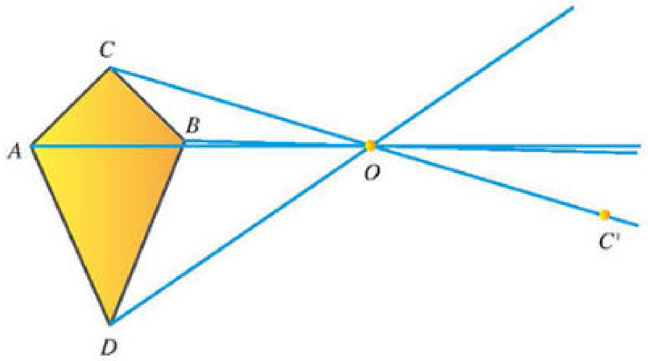


Describan las características de las figuras homotéticas. Elaboren un resumen sobre este tema.

¿Cuáles son las propiedades de la homotecia?

Benjamín y Lorena comenzaron a trazar los siguientes pares de figuras homotéticas.





Completen el trazo de las figuras homotéticas de Benjamín y Lorena.

1. Analicen y respondan las preguntas que aparecen a continuación.

   a) ¿Cuál es el valor de la razón de homotecia k en cada caso?
   b) ¿Qué relación se puede establecer entre los lados correspondientes de figuras homotéticas?
   c) ¿Qué sucede con éstas cuando $k < 0$?
   d) ¿Y cuando el valor es $k = 1$?
   e) ¿Qué se obtiene con $k = -1$?
   f) ¿Dos figuras semejantes también son homotéticas?, ¿por qué?

Presenten sus resultados al profesor.

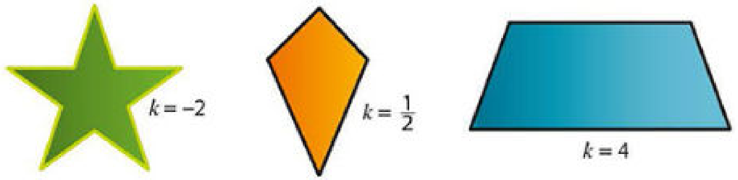
Aplico

Traza figuras que sirvan para ejemplificar las propiedades de la homotecia.

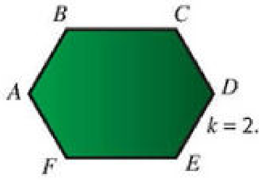
EVALUACIÓN FORMATIVA

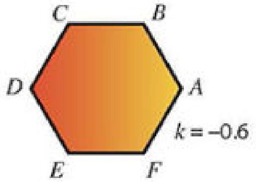
Realiza lo que se solicita en cada caso.

1. Copia en tu cuaderno las siguientes figuras. Escoge el centro de homotecia O en el plano y traza figuras homotéticas usando, para cada una, la razón de homotecia k que se indica.

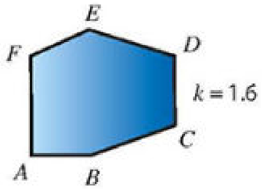


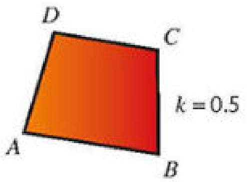
2. Obtén las figuras homotéticas correspondientes a cada una de las figuras de la izquierda, usando el vértice A como centro de homotecia y la razón de homotecia k que se indica en cada caso.





3. Elige para cada figura de la derecha un centro de homotecia en el interior del polígono. Traza un polígono homotético a cada uno de ellos usando la razón de homotecia que se indica.





Comunico

Redacta un escrito en el que describas y expliques el funcionamiento de un pantógrafo. Después, justifica la afirmación: "El pantógrafo es una aplicación de la homotecia para el dibujo de figuras semejantes".

Habilidades digitales

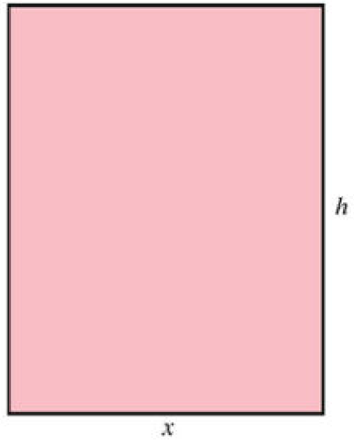
Realiza una búsqueda en internet sobre figuras homotéticas; puedes comenzar ingresando a la siguiente dirección electrónica:
http://lycee-valin.fr/maths/exercices_en_ligne/multiplication_vecteurs7.html
(Consulta: 20 de enero de 2015).
Usa el programa GeoGebra para trazar figuras homotéticas.

Proporcionalidad y funciones

Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos

ACTIVIDADES INICIALES

Valor máximo del área



Julia y Augusto cercaron un patio rectangular con 110 m de alambre.

Analiza la situación anterior y resuelve las siguientes actividades.

1. Completa el procedimiento para obtener una expresión algebraica que permita calcular el área A en función de la longitud de la base x.

   a) ¿Cuál es la fórmula para calcular el perímetro del rectángulo?

   b) ¿Cómo se puede usar la fórmula anterior para expresar la altura h en función de x?

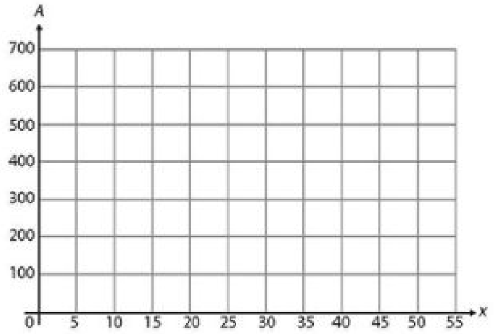
   c) ¿Cuál es la expresión algebraica de A en función de x?

2. Calcula algunos valores para el área a partir de los de la tabla.

x	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
$y = A$											

3. Construye una gráfica para A en función de x. ¿Qué significado tiene el valor obtenido para $x = 55$? ¿Cuál es el **valor máximo** del área que se puede obtener?

Justifica tus respuestas.



Glosario

valor máximo. Es el mayor de todos los valores que puede tomar una variable.

Comparen sus respuestas y verifiquen que sean correctas.

CONSTRUYO MIS CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES

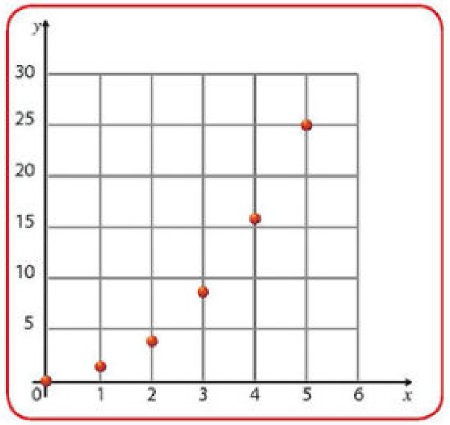
¿Cuál es la forma de las gráficas de las funciones cuadráticas?

Soledad y Javier utilizan el plano de coordenadas (x, y) para modelar diversas situaciones o fenómenos mediante gráficas de **funciones cuadráticas**.

Analiza cada situación y reproduce las gráficas de las funciones cuadráticas.

1. Representación gráfica de la sucesión numérica expresada en la tabla de valores.

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25



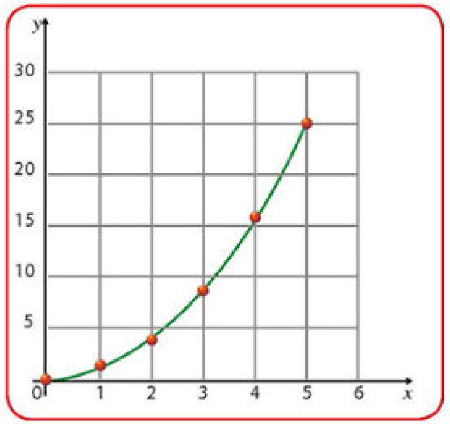
Glosario

función cuadrática. Es una relación en la que a cada valor de la variable independiente le corresponde un valor que se calcula con la expresión $y = ax^2 + bx + c$

parábola. Sección cónica que se forma con la intersección de un cono y un plano paralelo a la recta generatriz.

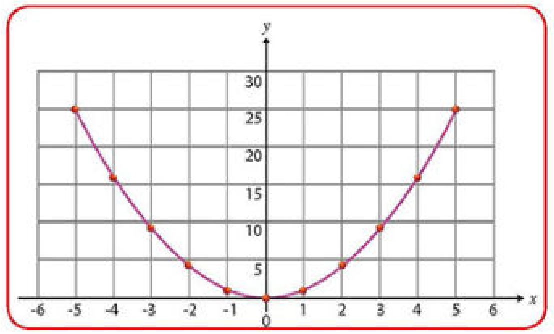
2. Construcción de la gráfica que representa el área de cuadrados de lado x.

$y = x^2$



3. Representación gráfica de la función cuadrática.

$y = x^2$



Comparen las representaciones algebraicas anteriores para que determinen las semejanzas y diferencias.

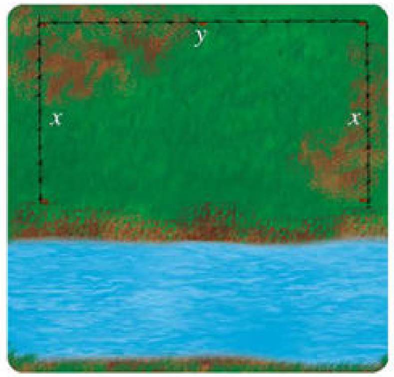
Justifiquen la afirmación: "La representación gráfica de las funciones cuadráticas es una **parábola**".

¿Cómo se puede construir la gráfica de una función cuadrática?

Bloque TRES

Analicen y completen el procedimiento que se puede seguir para construir la parábola que representa una función cuadrática.

Un problema clásico dice que un ganadero tiene 400 m de alambre para cercar un terreno de forma rectangular. ¿Cuáles deben ser las medidas de los lados del rectángulo para obtener el terreno con área máxima, si uno de los lados no se debe cercar en virtud de que colinda con un río?, ¿cómo se calcula el área del terreno cercado?



Comprendo

Completa y explica el procedimiento para obtener la función cuadrática que modela esta situación.

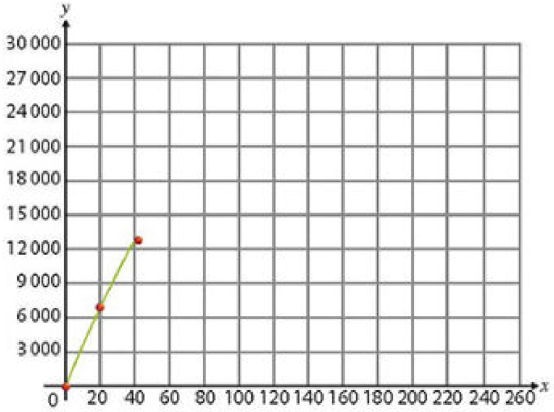
$\boxed{2x + y =}$ $\boxed{y =}$

Área $= xy$ Área $= x(400 - 2x)$

Área $= 400x - 2x^2$

Si se escogen algunos valores para la variable independiente x, se pueden calcular los correspondientes para la variable dependiente y. Completa la tabla y grafica los puntos sobre el plano cartesiano.

x	y
20	7 200
40	12 800
60	
80	
100	
120	
140	



Aplico

Traza las gráficas de estas funciones cuadráticas:

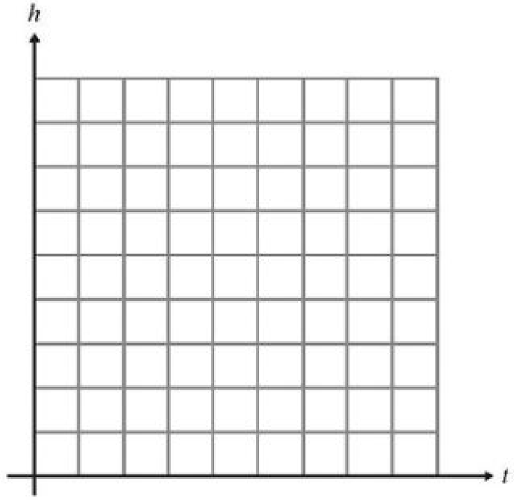
a) $y = -x^2 + 1$
b) $y = 3x^2 - 7$
c) $y = -5 + x^2$

Analiza las situaciones que se incluyen a continuación; realiza los cálculos necesarios para construir la gráfica correspondiente y responder las preguntas que se presentan en cada caso.

1. La altura que alcanza un objeto móvil que se lanza verticalmente hacia arriba se puede expresar en función del tiempo transcurrido mediante la expresión algebraica:

$$h = 2 + 20t - 4.9t^2$$

a) Traza la representación gráfica correspondiente.
b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el móvil?, ¿en qué tiempo lo hace?
c) ¿Cuánto tiempo tardará en caer al suelo?
d) ¿Qué representa el punto (0, 2) de la gráfica?



2. La ganancia en miles de pesos que obtiene un fabricante de muebles al vender x número de sillas se puede calcular con la expresión algebraica:

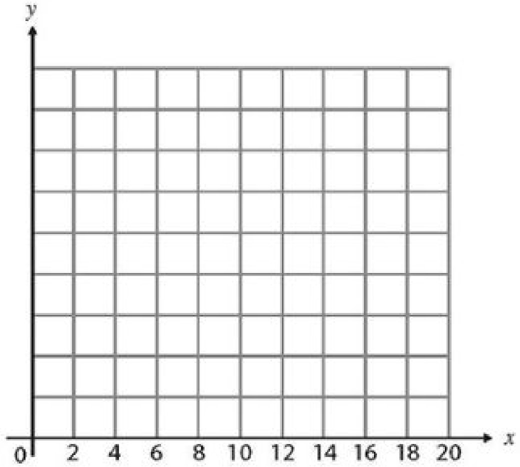
$$y = -3x^2 + 60x + 200$$

También se sabe que si la producción crece demasiado, las ganancias disminuyen.

¿Cuál es la tamaño de la produción que más le conviene al fabricante?

¿Cuál es la ganancia en este caso?

x	y
2	
4	
8	
12	
16	
18	
20	



Comunico

Escribe algunas conclusiones sobre las gráficas obtenidas de las funciones cuadráticas y preséntalas al profesor.

Tres puntos importantes para trazar una parábola

Evangelina y Omar calculan tres puntos para trazar la gráfica de una función cuadrática:

$$y = -2x^2 + 12x - 13$$

Primero calculan las raíces de la ecuación cuadrática asociada:

$$-2x^2 + 12x - 13 = 0$$

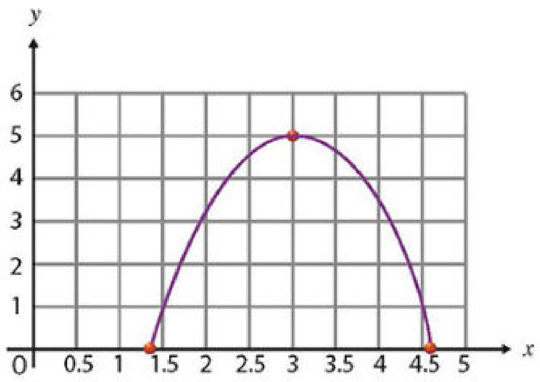
$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(-2)(-13)}}{2(-2)}$$

$\boxed{x_1 = \quad}$ $\boxed{x_2 = \quad}$

Con estos valores se obtienen las parejas: (1.42, 0) y (4.6, 0).

Después se transforma la ecuación:

$$y = -2x^2 + 12x - 13$$
$$y = -2(x^2 - 6x) - 13$$
$$y = -2(x^2 - 6x + 9) + 18 - 13$$
$$y = -2(x - 3)^2 + 5$$



Si $x = 3$, se obtiene el valor $y = 5$; con estos valores se forma la pareja (3, 5).

Los puntos (1.42, 0), (4.6, 0) y (3, 5) son importantes para trazar la parábola correspondiente.

Analicen el procedimiento seguido por Omar y Evangelina, y respondan las siguientes preguntas:

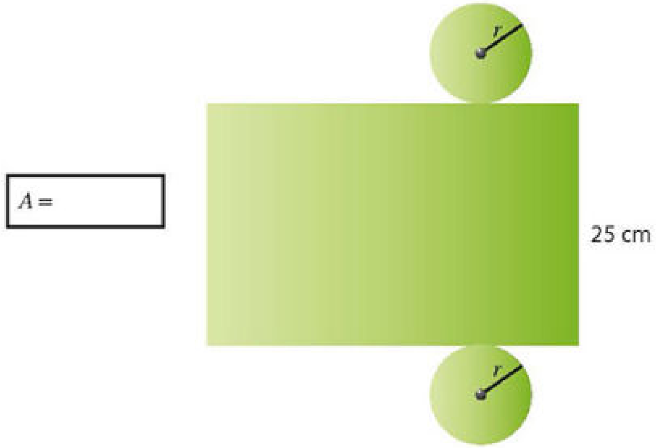
1. ¿Qué es el vértice de una parábola?
2. ¿Qué son los ceros de una función cuadrática?

Aplica el procedimiento anterior para que construyas las gráficas de las funciones cuadráticas que se incluyen a continuación.

1. $y = -3(x - 4)^2 + 8$
2. $y = 3x^2 + 6x + 10$
3. $y = -(x - 4)^2 + 6$

Analiza cada situación y realiza lo que se solicita.

1. Representa gráficamente las áreas totales de todos los cilindros que se pueden obtener al ir variando el radio, sabiendo que la altura es de 25 cm.



2. Justifica por qué el valor máximo de la función cuadrática $y = -x^2$ es cero. Haz la representación gráfica correspondiente.
3. Desde una plataforma que se encuentra a 100 m bajo el nivel del suelo se lanza un cohete con una velocidad de 52 m/s. Justifica que la altura h, alcanzada por el cohete a t segundos del lanzamiento está dada por $h = -4.9t^2 + 52t - 100$.

Realiza la gráfica correspondiente.

4. Traza las gráficas de las siguientes funciones cuadráticas y redacta tu procedimiento para que se lo presentes a tu profesor.

a) $y = -(x - 2)^2 + 8$ b) $y = 2(x + 6)^2 - 7$

Habilidades digitales

Realiza una búsqueda en internet en torno a gráficas de funciones cuadráticas; puedes comenzar ingresando a la siguiente dirección electrónica:
http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/f2_cuadratica.html
(Consulta: 11 de agosto de 2014).
Realiza los ejercicios presentados en la página sugerida. Posteriormente, describe un procedimiento para trazar las gráficas de una función cuadrática y preséntalo a tu profesor para que lo valide.

Proporcionalidad y funciones

Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera

ACTIVIDADES INICIALES

Llenado de recipientes

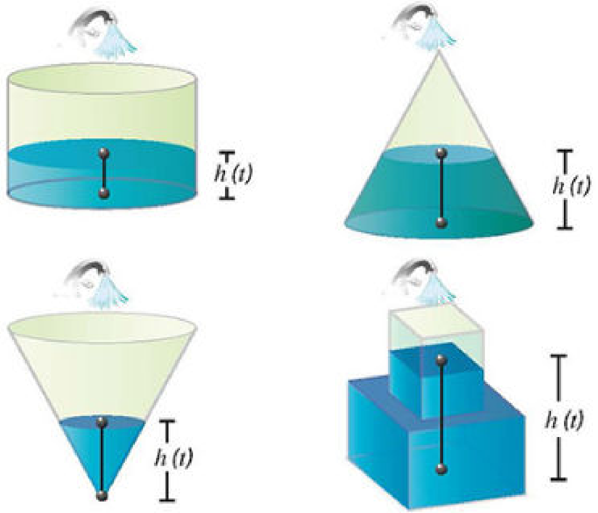
Glosario

rapidez constante. Es la rapidez que conserva su mismo valor durante un proceso.

Oswaldo y Leonila diseñaron varios experimentos para conocer las variaciones en la altura que va alcanzando un líquido que se vacía en distintos recipientes.

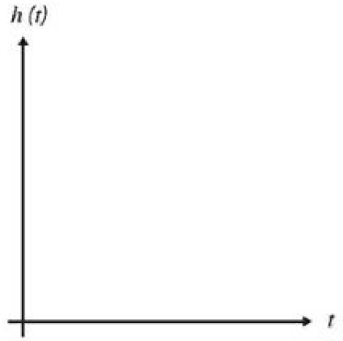
Para lograr que la altura que alcanza el líquido sólo dependa de la forma del recipiente, el líquido debe vaciarse con **rapidez constante**.

Los diferentes recipientes usados por Oswaldo y Leonila se presentan a continuación.



Analicen los recipientes y construyan las gráficas que representen la variación de la altura h en relación con la variación del tiempo t en cada caso.

Comparen sus gráficas y comprueben si se construyeron de manera correcta.



CONSTRUYO MIS CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES

¿Cómo se realizan la lectura y la interpretación de las gráficas con secciones curvas y rectas?

Glosario

interpretación de gráficas. Es leer y comprender la información que se representa en una gráfica.

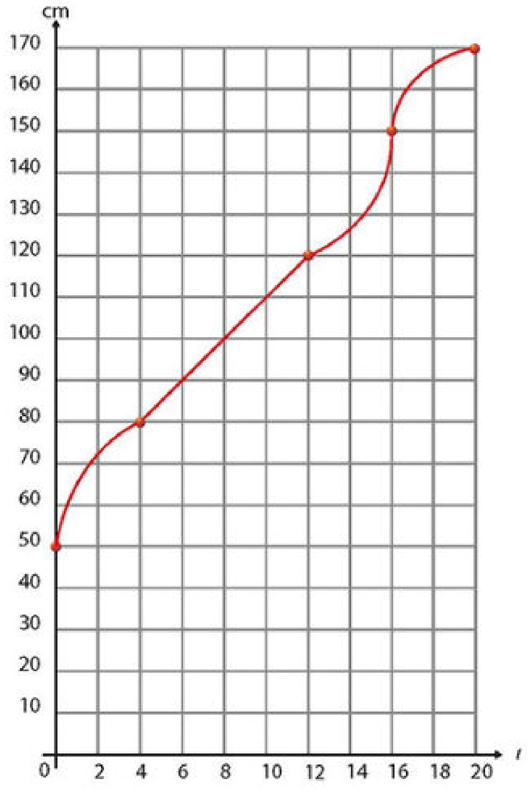
Bernardo, Estrella y Sebastián elaboraron representaciones gráficas de algunas situaciones que han vivido.

Analicen las situaciones presentadas para que puedan hacer la **interpretación de gráficas** con secciones rectas y curvas.

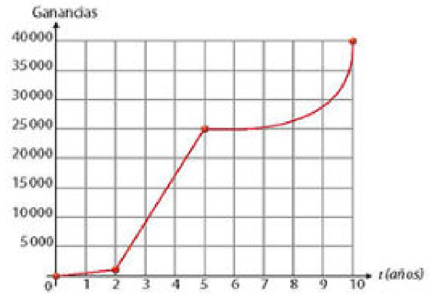
1. Bernardo platica que su crecimiento no ocurrió de manera lineal durante sus primeros 20 años de vida y con una gráfica representó lo que sucedió.

Analicen la gráfica y describan lo que representó.

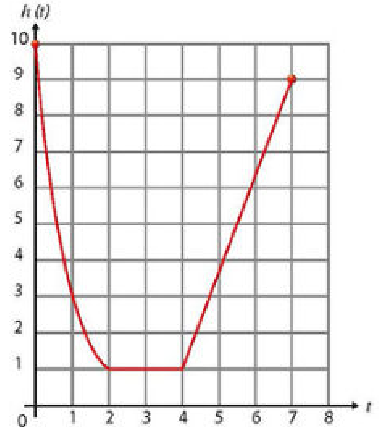
Comparen sus resultados con los de otros compañeros.



2. Estrella inició un negocio para vender muebles de cocina y ahora presenta una gráfica de la evolución de sus ganancias en el transcurso del tiempo.
   a) ¿Qué sucedió durante los dos primeros años?
   b) ¿En qué año creció más el monto de sus ventas?



3. Sebastián es elevadorista y presta sus servicios en un edificio de 10 pisos. Describan lo que le sucedió en una ocasión, de acuerdo con la representación gráfica de dicho suceso.



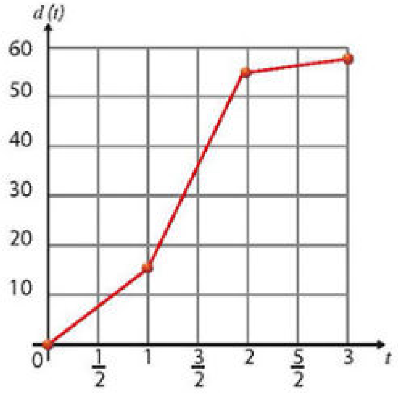
4. La hermana de Bernardo es azafata de aviación y partió de una ciudad que se ubica a 2240 m sobre el nivel medio del mar. Ella representó gráficamente su último viaje.

¿A qué hora inició el vuelo?

¿A qué altura viajó el avión en el que trabaja Susana?

¿Por qué se puede afirmar que el viaje fue a algún lugar cerca del mar?

¿Cuánto tiempo duró el viaje de ida? ¿Y el de regreso?



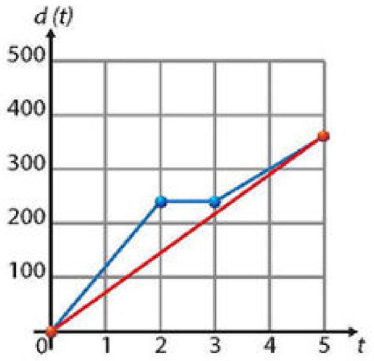
5. El primo de Estrella se prepara para el triatlón. Describan lo que sucedió en su práctica de natación, ciclismo y carrera a pie.

Presenten sus respuestas ante el grupo y compruébenlas.

Aplico

Los familiares de Sebastián realizaron un viaje en el cual emplearon dos automóviles.

a) Describan el recorrido realizado por el primer automóvil (línea azul).
b) ¿Cuál fue el recorrido realizado por el segundo automóvil (línea roja)?



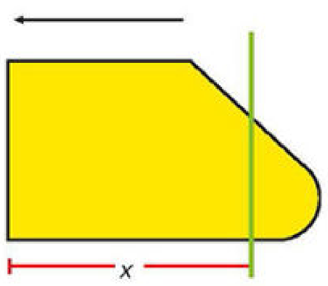
Comprendo

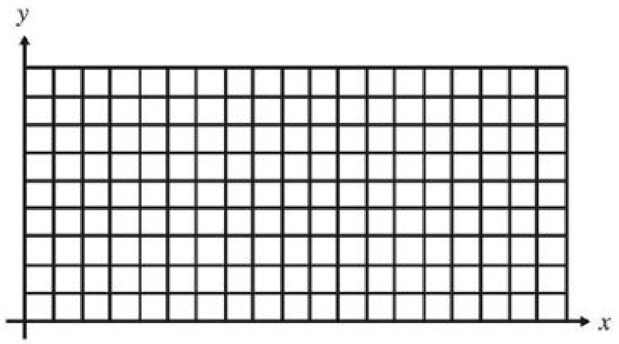
Argumenta cada una de las respuestas y descripciones obtenidas en las actividades anteriores.

¿Cómo se pueden modelar diferentes situaciones mediante la construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas?

Para que se familiaricen con la elaboración de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelen situaciones, realicen las siguientes actividades.

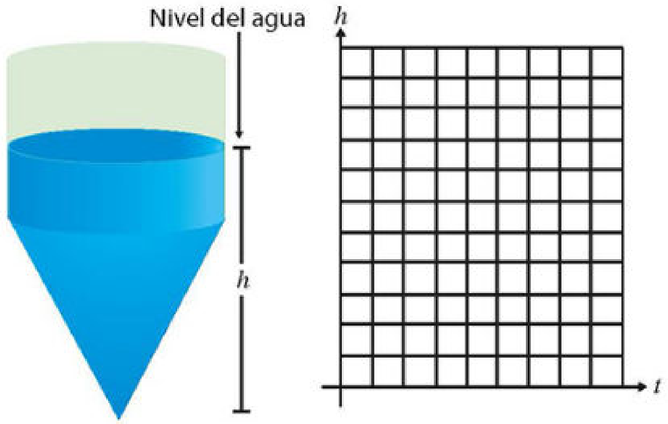
1. A la figura amarilla se le hace un escaneo de derecha a izquierda, con lo cual el área escaneada va incrementándose, y se relaciona con la variable x. Tracen la gráfica correspondiente para $y = A(x)$.

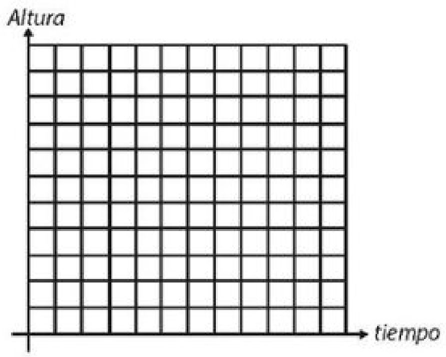




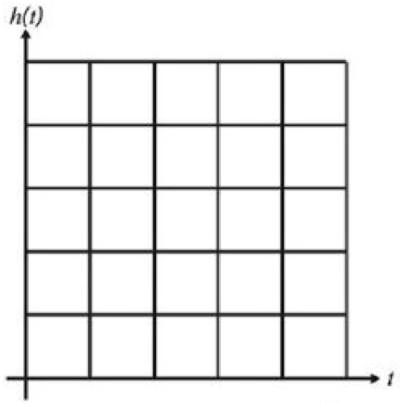
2. Elaboren la gráfica representativa para la altura que va alcanzando el nivel del agua al vaciarla en el recipiente con una rapidez constante.

3. Imagínense que están en una competencia de esquí y les piden que representen gráficamente su recorrido. Realicen su gráfica y pídanle a otros compañeros que describan el trayecto.

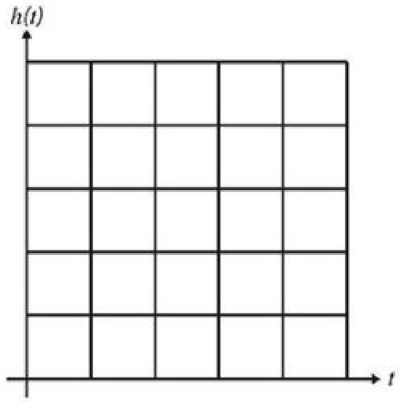




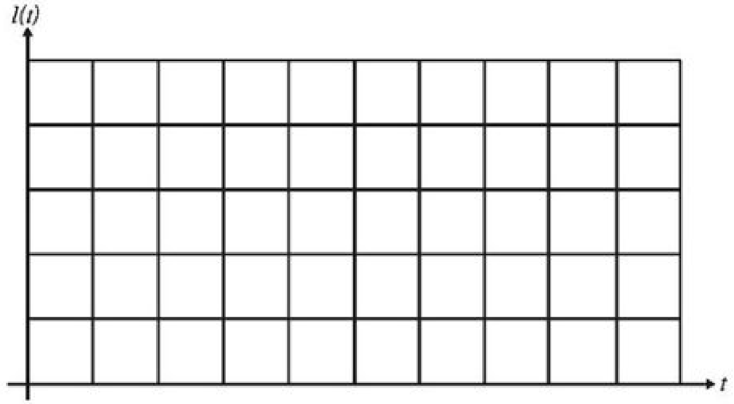
4. En una gráfica representen la altura a la que se encontrará la pelota de golf desde el comienzo del juego hasta que entra en el hoyo correspondiente.

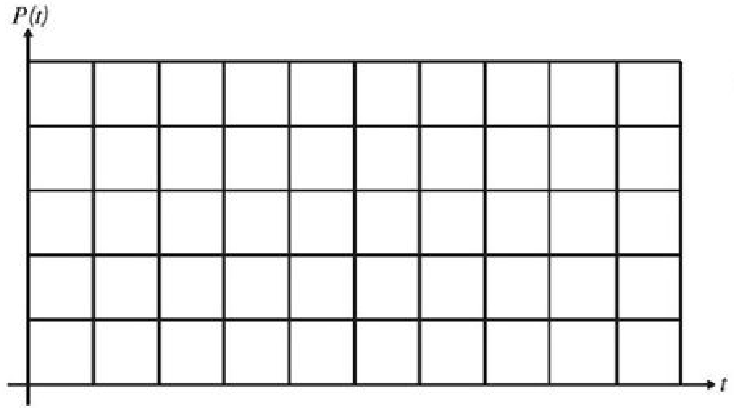


5. Se construyó un edificio, se usó durante algún tiempo y después se demolió. Hagan una representación gráfica de la altura de la construcción en diferentes momentos.



6. Un incendio comenzó con una pequeña fogata; después el viento llevó el fuego a una pradera; y posteriormente llegaron los bomberos y lograron apagarlo. Representen mediante una gráfica la intensidad del incendio.





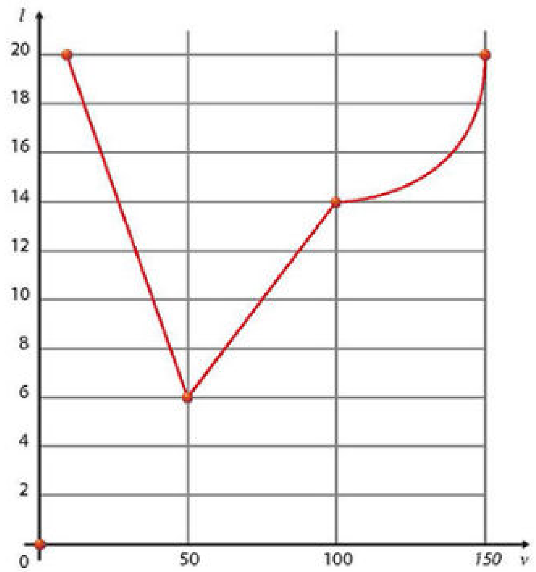
7. Una epidemia comienza con una enfermedad que afecta a pocos individuos. En algún momento se propaga y luego llega a ser controlada con algunas acciones implementadas por la población. Hagan una representación gráfica de este fenómeno.

Comunico

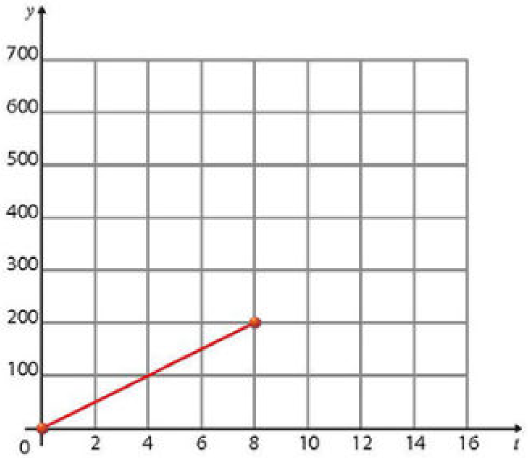
Realiza una investigación sobre el tema "Mejoramiento del ambiente", elabora un informe que incluya representaciones gráficas con información relevante y dalo a conocer a tus compañeros y profesor.

Analiza cada una de las situaciones que se presentan a continuación y realiza lo que se solicita.

1. Se hizo un estudio para determinar la cantidad de litros (l) de gasolina que se requieren para recorrer 100 km a cierta velocidad (v).



Describe los resultados que se presentan en la gráfica.



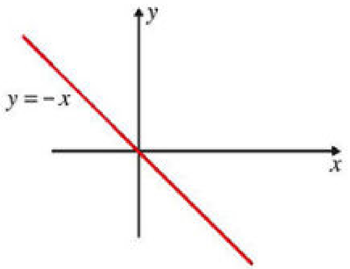
2. Un trabajador gana $25 por hora durante la jornada laboral de 8 horas.

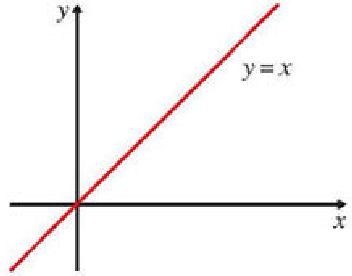
Si trabaja 4 horas extra recibe el doble por cada hora, y cuando lo hace por 4 horas más, por cada una recibe el triple.

Completa la representación gráfica del salario diario del trabajador.

3. Si un globo se llena con agua y se juega con él durante un tiempo determinado, éste se revienta y toda el agua se derrama en el suelo. Representa mediante una gráfica la situación anterior y después explícala.

4. Analiza las gráficas de las funciones.



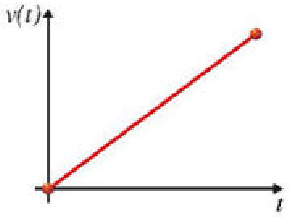


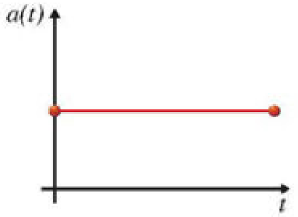
Construye la representación gráfica de la relación $y = |x|$, en la que $|x|$ significa el valor absoluto de x. Presenta los resultados obtenidos al profesor.

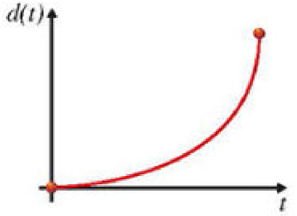
Las gráficas del movimiento uniformemente acelerado

Realicen una investigación sobre las relaciones que hay entre las variables tiempo (t), rapidez (v), distancia (d) y aceleración (a) cuando un móvil se desplaza con aceleración constante. Realicen lo que se solicita en cada caso.

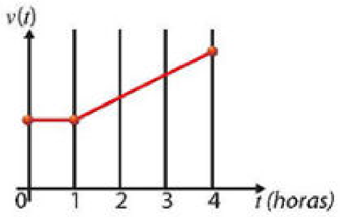
1. Analicen y expliquen las siguientes gráficas.

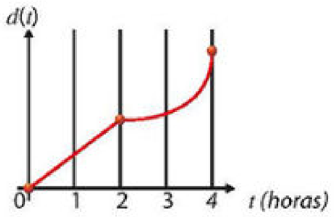


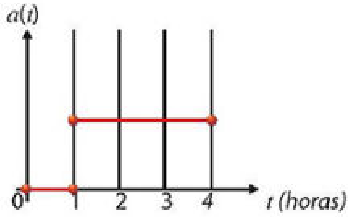


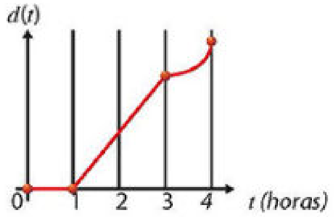


2. Analicen las gráficas y describan las relaciones que se presentan en cada una de ellas.

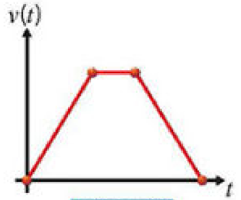




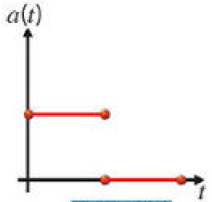




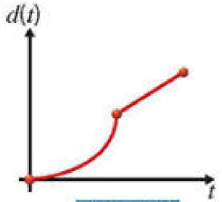
3. En cada caso, se presenta la gráfica del comportamiento de una de las variables del movimiento con aceleración constante. Analiza cada gráfica y traza las correspondientes para las otras variables.



a(t) y d(t)



v(t) y d(t)



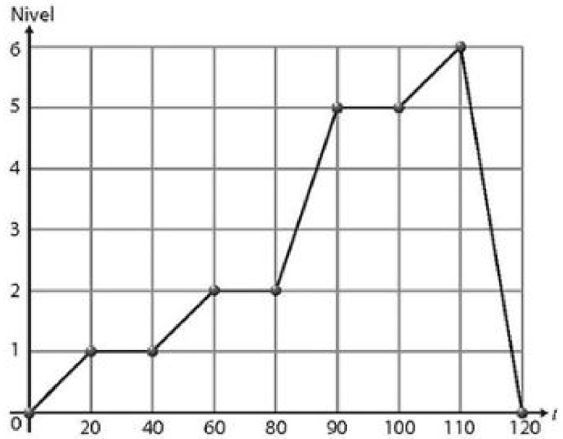
v(t) y a(t)

Comunico

Redacta un escrito en el que presentes los resultados de las actividades al profesor para que los valide y menciones cómo podrías aplicar en tu vida cotidiana los aprendizajes que desarrollaste.

Realiza lo que se solicita a continuación.

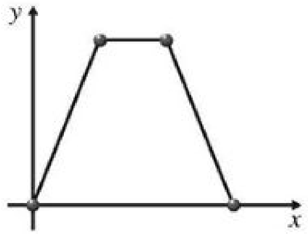
1. La gráfica representa el uso de un elevador. Describe su recorrido.

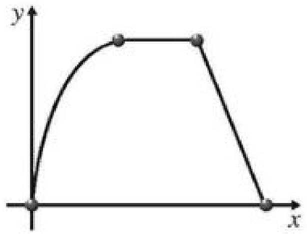


2. Construye la gráfica que representa el recorrido de Luis desde su casa hasta su escuela. Toma en cuenta que camina 10 min, espera durante 5 min al autobús, en el cual viaja durante 16 min, y espera 4 min en la puerta de la escuela.

3. Mediante una gráfica representa la altura que alcanza un líquido que se vierte sobre un recipiente como el de la ilustración.

4. Para cada una de las gráficas, describe una situación que se comporte de tal manera que sea una representación de lo que sucede.





Presenta tus descripciones al profesor para que las revise y valide.

Habilidades digitales

Accede a la siguiente página electrónica y desarrolla la actividad:
http://132.248.17.248/lite/2013/1.3_RecursosAdaptados/Telesecundaria/3_tercero/3_Matematicas/3m_b03_t07_s01_descartes/index.html
(Consulta: 25 de septiembre de 2014).

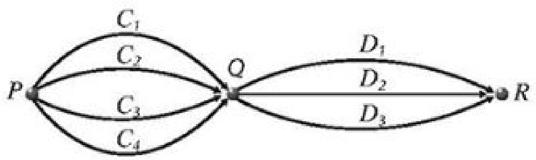
Nociones de Probabilidad

Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto)

ACTIVIDADES INICIALES

Caminos entre ciudades

Las ciudades P, Q y R se comunican entre sí de la siguiente manera: para ir de P a Q hay 4 caminos, de Q a R se tienen 3 vías y para ir de P a R se debe pasar necesariamente por Q y usar alguno de los ya mencionados.



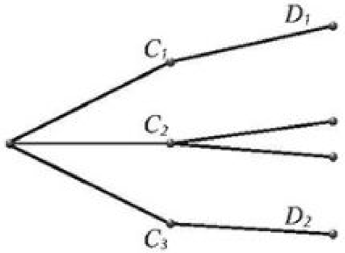
a) ¿De cuántas maneras diferentes se puede ir de la ciudad P a la ciudad R?

b) Si los caminos se seleccionan al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el recorrido para ir de P a R sea C_3D_2?, es decir, de P a Q se usa el camino C_3 y de Q a R se transita por D_2.

Analicen la situación problemática planteada y realicen lo que se solicita a continuación.

1) Contesten las preguntas arriba planteadas y justifiquen sus respuestas.

2) Completen el siguiente diagrama de árbol y calculen la probabilidad de pasar por C_3D_2.



Comparen los procedimientos y las dos respuestas obtenidas para la probabilidad solicitada. Describan las semejanzas y diferencias. Lleguen a una conclusión al respecto.

Presenten sus resultados al profesor.

CONSTRUYO MIS CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES

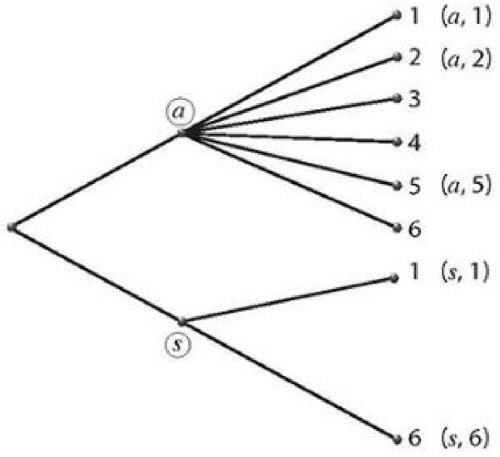
¿Cómo se puede calcular la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes?

Lorenzo e Imelda se han dado cuenta de que algunos problemas de probabilidad se pueden resolver usando dos procedimientos diferentes. Si se pretende calcular la probabilidad de que al lanzar una moneda y un dado se obtenga el resultado:

(águila, 5) = (a, 5).

A es el evento "obtener un águila con la moneda".
B es el evento "obtener un 5 con el dado".

Completa el diagrama de árbol en tu cuaderno para que registres los resultados posibles que se pueden presentar al lanzar una moneda y un dado.

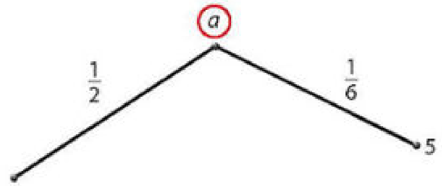


¿Cómo se puede calcular la probabilidad del evento A y B?

Calcula la probabilidad de ocurrencia del evento A y B, es decir, obtener un águila con la moneda y el número 5 con el dado.

Analicen la situación que se ha resuelto y realicen las siguientes actividades.

1. ¿Cómo se puede calcular la probabilidad del evento A y B a partir de las probabilidades $P(A)$ y $P(B)$?
2. Calculen $P(A \text{ y } B)$ y comparen su respuesta con la que obtuvieron anteriormente.
3. Justifiquen todas sus respuestas.
4. Escriban las probabilidades correspondientes en el diagrama de árbol y expliquen el significado del producto $\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}$.

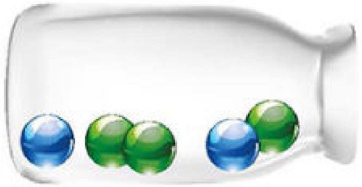


Calculen la probabilidad de que en el lanzamiento de 3 dados se obtenga el resultado 18.

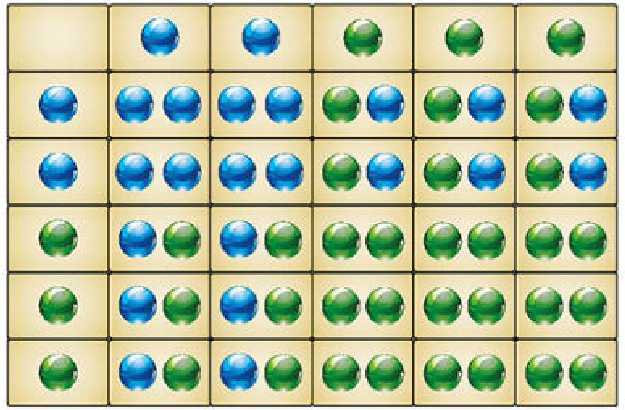
¿Qué condiciones se deben cumplir para que se pueda aplicar la fórmula $P(A \text{ y } B) = P(A)P(B)$?

Para que puedas responder a la pregunta anterior, analiza los siguientes ejemplos.

1. **Extracción con remplazo**. Considerando que se tienen 3 canicas verdes y 2 azules, el evento A será obtener una verde. ¿Cuál es el valor de $P(A)$? El evento B será obtener una canica azul. ¿Cómo se calcula $P(B)$?



Para analizar qué sucede en 2 extracciones sucesivas:



a) Se extrae al azar una canica del frasco, después se registra su color: a = azul y v = verde; posteriormente se regresa la canica al frasco (por eso se llama extracción con reemplazo).

b) Se extrae al azar otra canica del frasco y se registra su color.

A y B será el evento: obtener una canica verde en la primera extracción y una azul en la segunda.

Observemos que el resultado de la primera extracción no afecta las probabilidades de la segunda extracción; por esta razón se dice que A y B son independientes.

El resultado (va) aparecerá 6 veces de un total de 25 resultados posibles. ¿Cuál es el valor para $P(A \text{ y } B)$?

En este caso se tiene: $P(A) \times P(B) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$

Es decir, $P(A \text{ y } B) = P(A) \times P(B)$

Generalizo

Cuando A y B son eventos independientes se cumple la siguiente fórmula:

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \times P(B)$$

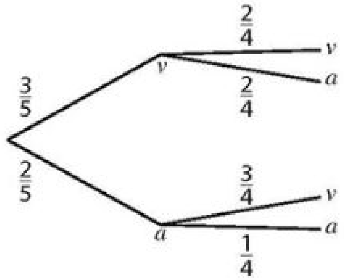
2. **Extracción sin remplazo**. El experimento es parecido al anterior, sólo que no se regresa la canica de la primera extracción. P(canica azul en la segunda extracción) es un valor que depende de lo que haya sucedido en la primera extracción.

Pienso

Construye una tabla con todos los resultados posibles y verifica que en este caso se obtiene:

$$P(A \text{ y } B) = \frac{6}{20} \neq P(A) \times P(B) = \frac{6}{25}$$

Otra manera de resolver el problema anterior consiste en usar un diagrama de árbol.



Para la primera extracción se tiene:

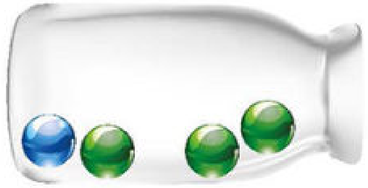
$$P(v) = \frac{3}{5}, \qquad P(a) = \frac{2}{5}.$$

Si la primera canica extraída fue verde, el frasco queda como se ilustra en la figura:

Ahora tenemos:

$$P(v) = \frac{2}{4}, \qquad P(a) = \frac{2}{4}.$$

Si la primera canica fue azul, el frasco queda como se ilustra en la figura. En este caso:

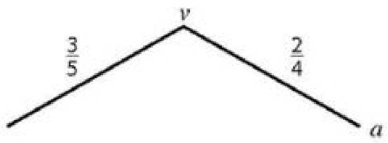


$$P(v) = \frac{3}{4}, \qquad P(a) = \frac{1}{4}.$$

Con la finalidad de calcular $P(A \text{ y } B) = P(va)$, se observa la rama del árbol que indique que la primera canica fue verde y la segunda azul.

$\frac{3}{5}$ de las veces que se extraiga la primera canica, ésta será de color verde.

De estas $\frac{3}{5}$ partes, $\frac{2}{4}$ de las veces que se saque la segunda canica, ésta será azul; es decir $\frac{2}{4}$ de $\left(\frac{3}{5}\right)$ de las veces la primera canica será verde y la segunda será azul, por tanto:



$$P(A \text{ y } B) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$$

Analicen y resuelvan lo que se indica a continuación.

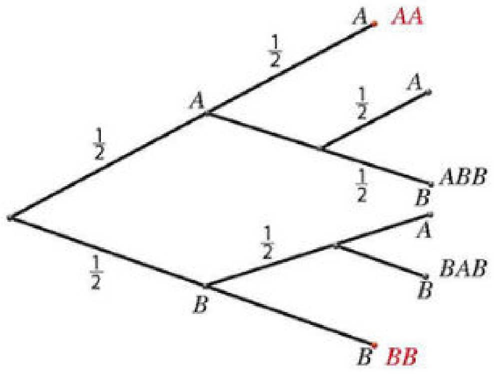
1. Calculen la probabilidad P de que al tirar 2 dados el primer número sea mayor que 4 y el segundo sea menor que 5.
2. Calculen la probabilidad P de que un número de 2 cifras se forme con un número par en el lugar de las decenas y con un número primo en las unidades.
3. Un par de tiradores A y B tienen probabilidades de dar en el blanco de 0.8 y 0.9, respectivamente. Calculen la probabilidad P de que ambos acierten en el blanco en su próximo tiro.

Cálculo de la probabilidad para más de dos eventos

Zenaida y Aurelio analizan lo que puede suceder en un juego de voleibol entre los equipos A y B, si los dos equipos de voleibol tienen la misma probabilidad de ganar un set. ¿Cómo se puede calcular la probabilidad P de que un partido, a 2 de 3 sets, requiera que se lleven a cabo únicamente 2 sets? ¿Cuál es la probabilidad de que se requiera jugar los 3 sets?

1. Completen el diagrama de árbol y respondan lo que se solicita.

2. ¿Cuál es el significado de $\frac{1}{2}$ y de las expresiones AA y BB?



3. Calculen las siguientes probabilidades:

$P(BB) =$ ____________ $P(AA) =$ ____________

4. Justifiquen que la probabilidad de que el juego se termine en 2 sets se puede representar de la siguiente forma:

$$P(AA \text{ o } BB)$$

¿Cuál es el valor de esta probabilidad?

5. ¿Cómo se han representado los casos en que el juego se termina en 3 sets?

6. Calculen las siguientes probabilidades:

$P(ABA) =$ ____________ $P(ABB) =$ ____________

$P(BAA) =$ ____________ $P(BAB) =$ ____________

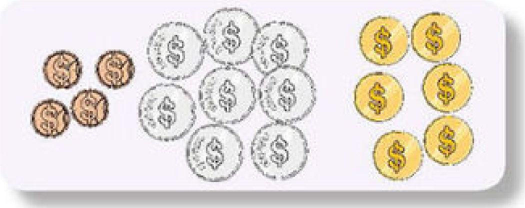
$P(\text{El juego requiere de 3 sets}) =$ ____________

Analicen la situación que se presenta cuando la probabilidad P de que el equipo A gane un set es de 0.6.

1. Construyan el diagrama de árbol correspondiente.
2. Calculen la probabilidad de que el juego se termine en 2 sets y gane el equipo A.
3. Obtengan la probabilidad de que el juego requiera de los 3 sets y gane el equipo B.

Analiza cada situación y realiza lo que se solicita.

1. En un monedero hay 6 monedas de oro, 8 de plata y 4 de cobre. Si se extraen al azar 3 monedas en forma sucesiva y con reemplazo, ¿cuál es la probabilidad de que la primera sea de cobre, la segunda de plata y la tercera de oro?



2. Se lanzaron 7 volados consecutivos y todos los resultados fueron "águila". ¿Cuál es la probabilidad de que en el octavo volado también se obtenga "águila"? ¿Cuál es la probabilidad de obtener "sol"?

Justifica cada una de tus respuestas.

3. Calcula la probabilidad de que al lanzar 4 monedas se obtengan 4 resultados iguales.

4. En el grupo escolar de Laura hay 18 hombres y 20 mujeres. Si se escoge al azar a dos estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que resulten seleccionados un hombre y una mujer?

Resuelve este problema usando dos procedimientos diferentes. Realiza un escrito para explicar cada uno de ellos.

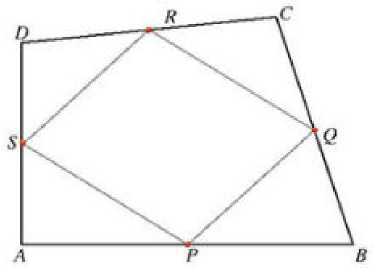
Habilidades digitales

Realiza una búsqueda en internet a fin de que conozcas la diferencia entre eventos dependientes e independientes. Puedes comenzar ingresando a la siguiente dirección electrónica: thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/28/5.html
(Consulta: 12 de enero de 2015).

Evaluación final

Analiza cada uno de los planteamientos para que respondas lo que se solicita.

1. Los padres de Adela le muestran un procedimiento especial para trazar paralelogramos. Trazan un cuadrilátero $ABCD$, usan los puntos medios y obtienen un paralelogramo.



¿Es cierto que $PQRS$ será un paralelogramo sin importar la forma del cuadrilátero $ABCD$ con el que se inició el procedimiento? Justifica tu respuesta.

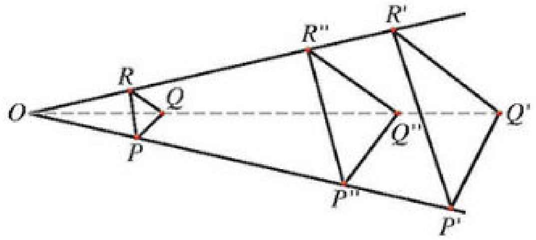
2. Traza un segmento cuya longitud x sea la tercera proporcional de los segmentos de longitudes $a = 5$ cm y $b = 7$ cm.

Considera que la tercera proporcional x de 2 cantidades a y b debe cumplir la proporción:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$$

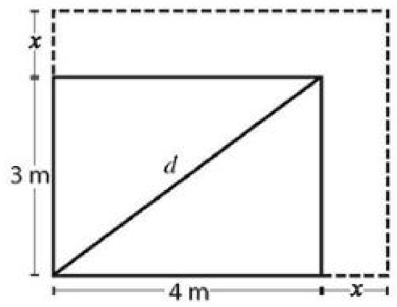
3. Realiza cada uno de los siguientes pasos.

a) Traza un triángulo $\triangle PQR$ y un centro de homotecia O.



b) Elabora un triángulo $\triangle P'Q'R'$ homotético al $\triangle PQR$ y con razón de homotecia $k = 4$.
c) Usa la razón de homotecia $k_2 = 0.75$ para trazar un $\triangle P''Q''R''$ que sea homotético a $\triangle P'Q'R'$.
d) ¿Cómo se puede calcular el valor de k que cumple con las siguientes igualdades $\overline{OP}'' = k(\overline{OP})$ $\quad \overline{OQ}'' = k(\overline{OQ})$ $\quad \overline{OR}'' = k(\overline{OR})$?
e) Usa el valor calculado de k para trazar la figura homotética del triángulo $\triangle PQR$.
f) Completa y justifica la siguiente afirmación: "La razón de homotecia k de una composición de homotecias con el mismo centro se calcula…"

4. Un rectángulo ajustable tiene las medidas mínimas que se señalan en la figura.



La base y la altura pueden ampliarse en una cantidad x. Calcula el valor necesario de x para que la diagonal adquiera el valor de 12 m.

Ejercita tu aprendizaje con este código sobre el uso de la fórmula general en la resolución de problemas.

Marca el círculo que contenga la respuesta correcta a cada cuestión. En tu cuaderno escribe los razonamientos y procedimientos que hayas seguido para obtener dicha respuesta.

1. Representación algebraica de los números cuyo cuadrado es 5.

   ○ $x = 5$ ○ $x^2 = 5$ ○ $x^2 + 5 = 0$ ○ $x + 5 = 0$

2. Es un criterio de semejanza de triángulos.

   ○ *TTT* ○ *ALL* ○ *LLA* ○ *AAA*

3. Es un criterio de congruencia de triángulos.

   ○ *LLL* ○ *AAA* ○ *AAL* ○ *LAA*

4. Es el autor de: " Los segmentos de rectas transversales entre paralelas son proporcionales".

   ○ Pitágoras ○ Euclides ○ Tulio ○ Tales

5. Se aplica en la construcción de figuras homotéticas.

   ○ Proporción ○ Congruencia ○ Igualdad ○ Semejanza

6. La gráfica de una función cuadrática es una:

   ○ Parábola ○ Recta ○ Circunferencia ○ Elipse

7. La gráfica de una relación de proporcionalidad directa es una:

   ○ Recta ○ Curva ○ Parábola ○ Circunferencia

8. La regla del producto se aplica a eventos:

   ○ Excluyentes ○ Complementarios ○ Dependientes ○ Independientes

9. Las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx = 0$ son…

   ○ $(0, -b)$ ○ $(0, -a)$ ○ $\left(0, -\frac{a}{b}\right)$ ○ $\left(0, -\frac{b}{a}\right)$

10. Las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + c = 0$ son…

   ○ $\left(0, -\frac{c}{a}\right)$ ○ $\left(0, +\frac{c}{a}\right)$ ○ $\left(0, \sqrt{-\frac{c}{a}}\right)$ ○ $\left(\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)$

BLOQUE CUATRO

Mandala Oriental. Los mandalas son diagramas o representaciones esquemáticas y simbólicas del macrocosmos y el microcosmos, utilizados en el budismo y el hinduismo. Por su repetitiva estructura a diferente escala es catalogado como un fractal.

Ejes temáticos

- Sentido numérico y pensamiento algebraico
- Forma, espacio y medida
- Manejo de la información

Aprendizajes esperados

- Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.
- Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.

Competencias

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas eficientemente

Patrones y ecuaciones

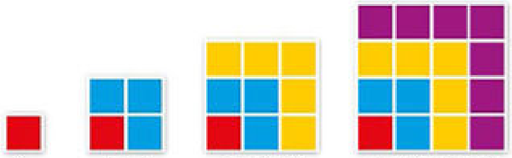
Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión

ACTIVIDADES INICIALES

El enésimo término de una sucesión

Analicen las sucesiones para completar lo que se solicita en cada caso.

1. Suma de los primeros n números impares.
   a) Tracen en su cuaderno la siguiente figura de la sucesión.
   b) Completen la siguiente tabla con los términos de la sucesión que representa a la suma de los primeros n números impares.

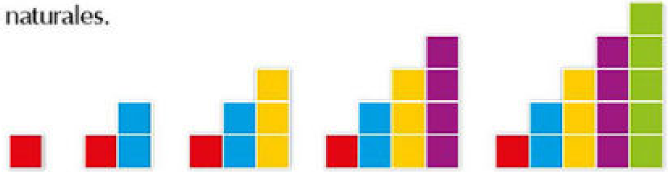


1   1 + 3   1 + 3 + 5   1 + 3 + 5 + 7

n	1	2	3	4	5	6	7	n
a_n	1	4						

   c) Completen la igualdad para obtener una expresión general que defina el enésimo término de la sucesión: 1, 4, 9, 16, 25, ..., a_n = ☐
   d) Calculen el término a_{16}.
   e) ¿Cuál es la posición que le corresponde al término 6 561?

2. Suma de los primeros n números naturales.
   a) Dibujen la siguiente figura de la sucesión.
   b) Escriban los términos de la sucesión que hacen falta.



1   1 + 2   1 + 2 + 3   1 + 2 + 3 + 4   1 + 2 + 3 + 4 + 5

n	1	2	3	4	5	6	7	n
a_n	1	3	6					

   c) Elaboren la regla general de la sucesión: 1, 3, 6, ..., a_n = ☐
   d) Calculen el término a_{11}.
   e) ¿Cuál es la posición que le corresponde al término 5 050?

Comparen cada una de las respuestas obtenidas y verifiquen que sean correctas. Presenten sus resultados al profesor.

Para que fortalezcan su aprendizaje conociendo otras sucesiones, consulten la sección "¿En qué medida aumentarían las bacterias que atacan el cuerpo de Filo si dejara de bañarse?" en el libro *La sorpresa de los números: un viaje al fascinante universo de las matemáticas* de Anna Cerasoli, el cual está disponible en su Biblioteca de Aula o Escolar (Libros del Rincón).

¿Cómo se puede obtener la expresión general cuadrática que define al enésimo término de una sucesión?

Yadira y Norberto aplican sus conocimientos sobre expresiones algebraicas para obtener el enésimo término de una sucesión.

La sucesión que pretenden construir es aquella que indica el número de saludos en una reunión a la que asisten n personas, quienes se saludan todas entre sí. ¿Cuáles son los primeros términos de la sucesión?

Completa la tabla con los términos que faltan.

n	1	2	3	4	5
a_n	0	1	3		

En virtud de que Norberto y Yadira pretenden relacionar las sucesiones con las expresiones algebraicas cuadráticas, suponen que la regla para obtener los diferentes términos de la sucesión es una expresión algebraica de segundo grado de la forma $a_n = an^2 + bn + c$.

Sustituyen las primeras parejas de valores (n, a_n) para obtener un sistema de ecuaciones.

Si $n = 1$, $a_n = 0$, se produce la pareja $(1, 0)$.

Al sustituir los valores anteriores en la expresión $a_n = an^2 + bn + c$ se obtiene la primera ecuación:

$$0 = a(1)^2 + b(1) + c \qquad \boxed{1}\ a + b + c = 0$$

Revisen el planteamiento del problema de Yadira y Norberto y completen el procedimiento para resolverlo.

a) (2, 1) $\quad 1 = a(2)^2 + b(2) + c \qquad \boxed{2}\ 4a + 2b + c = 1$,
b) (3, 3) $\quad 3 = a(\ )^2 + b(\ ) + c \qquad \boxed{3}\ 9a + 3b + c = 3$
c) Restar, miembro a miembro, las ecuaciones $\boxed{1}$ y $\boxed{2}$
d) Restar, miembro a miembro, las ecuaciones $\boxed{1}$ y $\boxed{3}$
e) Resolver el sistema de ecuaciones: $\begin{array}{l} 3a + b = 1 \\ 8a + 2b = 3 \end{array}$
f) Sustituir los valores calculados para a y b en la ecuación $a + b + c = 0$, con el fin de calcular el valor de c.
g) Escribir la regla de la sucesión a_n = ____________

Generalizo

Usa el procedimiento de Yadira y Norberto para obtener la expresión general cuadrática que define al enésimo término de las sucesiones numéricas.

n	1	2	3	4	n
a_n	−1	−4	−7	−10	

n	1	2	3	4	n
a_n	−7	−4	1	8	

n	1	2	3	4	n
a_n	7	10	21	34	

Completa el procedimiento para obtener una sucesión mediante la suma de los primeros números pares.

$2 = 2$ $\quad 2 + 4 = 6$ $\quad 2 + 4 + 6 = 12$ $\quad 2 + 4 + 6 + 8 = 20$

1. Escribe los elementos que hagan falta en la tabla de la sucesión numérica.

n	1	2	3	4	5	n
a_n	2	6	12			

2. Explica y completa los siguientes procedimientos.

Si $n = 1$, $\quad a_1 = 2 \quad a + b + c = 2$

Si $n = 2$, $\quad a_2 = 6 \quad 4a + 2b + c = 6$

Si $n = 3$, $\quad a_3 = 12 \quad 9a + 3b + c = 12$

$4a + 2b + c - a - b - c = 6 - 2$ ________________

$9a + 3b + c - a - b - c = 12 - 2$ ________________

3. Resuelve el sistema de ecuaciones: $\begin{matrix} 3a + b = 4 \\ 8a + 2b = 10 \end{matrix}$

4. Sustituye los valores de a y b en $a + b + c = 2$, para calcular el valor de c.

5. La expresión general cuadrática que define al enésimo término de la sucesión es:

____

Usen el procedimiento empleado por Yadira y Norberto para obtener la regla de cada sucesión numérica.

1.

n	1	2	3	4	n
a_n	8	32	72	128	

2.

n	1	2	3	4	n
a_n	3	13	23	33	

3.

n	1	2	3	4	n
a_n	15	15	15	15	

Comparen los procedimientos empleados para cada sucesión y determinen las semejanzas y diferencias entre éstos.

Método de diferencias para obtener la expresión cuadrática en una sucesión numérica

Aurelio y Nora investigaron sobre otro procedimiento para construir la expresión cuadrática que define al enésimo término de una sucesión numérica.

¿Cuál es la sucesión numérica que se forma al contar el total de caras visibles de una sucesión de figuras formadas por cubos?

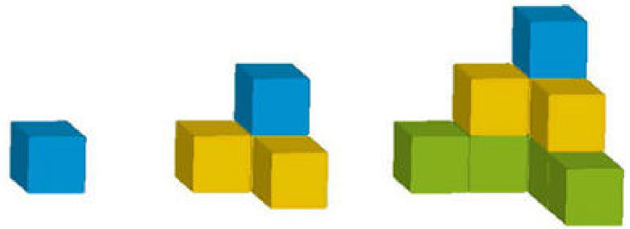


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Al contar las caras visibles en cada figura comienza a formarse la sucesión.

Figura	1	2	3	4	5
Caras visibles	3	9	17		

¿Cuál es la expresión algebraica que se puede usar para calcular el número de caras visibles de la figura que ocupa la posición n?

Analicen y expliquen el procedimiento seguido por Nora y Aurelio.

Figura	1	2	3	4
Caras visibles	3	9	17	27
Primeras diferencias		6	8	10
Segundas diferencias			2	2

La expresión que están buscando Aurelio y Nora es una expresión cuadrática de la forma: $a_n = an^2 + bn + c$.

Para ello, sustituyen los primeros valores de n y elaboran una tabla para calcular las primeras y las segundas diferencias.

a_1	a_2	a_3	a_4
$a + b + c$	$4a + 2b + c$	$9a + 3b + c$	$16a + 4b + c$
	$3a + b$	$5a + b$	$7a + b$
		$2a$	$2a$

Glosario

primeras diferencias. Es el resultado de restar dos términos consecutivos de una sucesión.

segundas diferencias. Se calculan mediante la resta de dos primeras diferencias consecutivas.

Justifico

Revisa los procedimientos anteriores, para que realices lo que se indica a continuación:

1. Justifica las ecuaciones:

$$2a = 2$$
$$3a + b = 6$$
$$a + b + c = 3$$

2. Obtén la regla de la sucesión y verifica cuántas caras visibles tiene la cuarta figura de la sucesión de cubos.

3. ¿Cuántos cubos son necesarios para hacer una figura que tenga 503 caras visibles?

Caída libre de cuerpos

Samuel investigó acerca de la caída libre de los cuerpos. En un libro de Física, encontró un experimento para determinar la altura que va descendiendo un cuerpo en caída libre.

Elaboró una tabla con los primeros valores de una sucesión que indica la distancia total recorrida en 1s, 2s y 3s.

t	1	2	3
h	4.9	19.6	44.1

Con base en los datos obtenidos por Samuel y el método de diferencias, encuentra una fórmula que sirva para calcular la altura que desciende un cuerpo en caída libre durante n segundos.

$h =$ ____________________

Obtén de tu libro de Física la fórmula correspondiente y compárala con la que planteaste. Determina las semejanzas y diferencias entre las dos fórmulas y redacta una conclusión. Presenta tus resultados al profesor para que los revise y valide.

Comprendo

En este caso se debe conocer, la expresión:

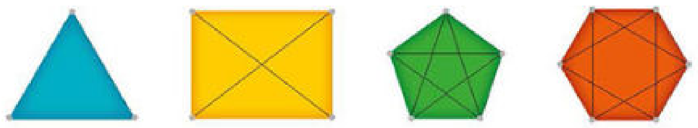
$$h(t) = at^2 + bt + c$$

Por lo que es necesario calcular los valores a, b y c.

EVALUACIÓN FORMATIVA

Realiza lo que se indica en cada caso.

1. Construye una fórmula para calcular el número de diagonales que se pueden trazar en un polígono de n lados.

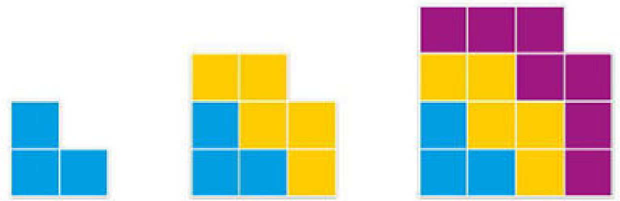


2. Escribe el término correspondiente a la posición 5 de la siguiente tabla, y deduce una fórmula para calcular a_n.

n	1	2	3	4	5	n
a_n	0	3	8	15		

3. Justifica la siguiente afirmación: “Para n puntos en el plano, se pueden trazar $\frac{n(n-1)}{2}$ segmentos”.

4. Escribe los primeros términos de la sucesión numérica determinada por las siguientes figuras.



n	1	2	3	4	5	n
a_n						

5. Calcula los valores de a, b y c. Sustitúyelos en la expresión $a_n = an^2 + bn + c$ para que obtengas la regla de la sucesión.

Habilidades digitales

Para que conozcas más acerca de las diferencias en las sucesiones, haz una búsqueda en internet. Puedes iniciar en la siguiente dirección electrónica:
http://www.disfrutalasmatematicas.com/algebra/sucesiones-encontrar-regla.html
(Consulta: 24 de septiembre de 2014).
Aplica la información en la solución de las actividades correspondientes a este tema.

Bloque **CUATRO**

Figuras y cuerpos

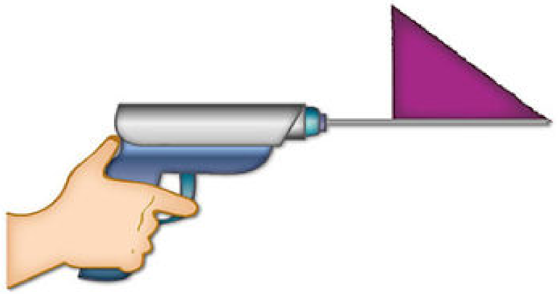
Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos

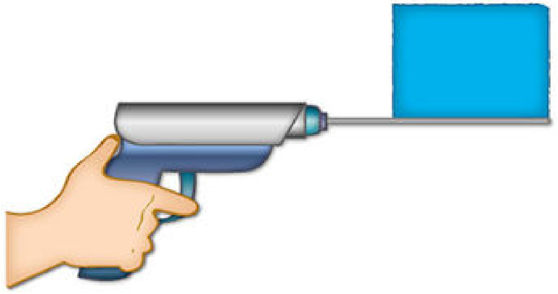
ACTIVIDADES INICIALES

Giros de figuras geométricas

Agustín, Rosalba y Berenice analizan los cuerpos geométricos que se obtienen al girar figuras geométricas alrededor de un eje.

1. Agustín pegó un triángulo rectángulo en la broca de un taladro y la puso a girar. ¿Qué cuerpo o sólido geométrico observó?

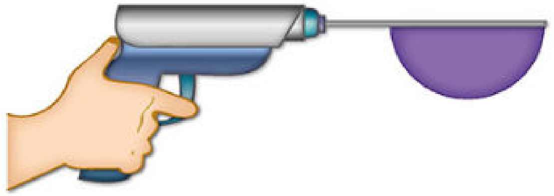




2. Rosalba usó un rectángulo y el taladro para generar otro cuerpo geométrico.

   ¿Cuál sólido geométrico observó?

3. Berenice puso a girar un semicírculo o mitad de un círculo. ¿Qué cuerpo geométrico observó?



Analicen las características de los cuerpos o sólidos geométricos anteriores y realicen lo que se indica enseguida.

1. Describan las características de cada uno de los cuerpos o sólidos geométricos generados por Agustín, Rosalba y Berenice.
2. Expliquen por qué reciben el nombre de cuerpos geométricos redondos o sólidos de revolución.

Comparen sus respuestas y verifíquenlas.

CONSTRUYO MIS CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES

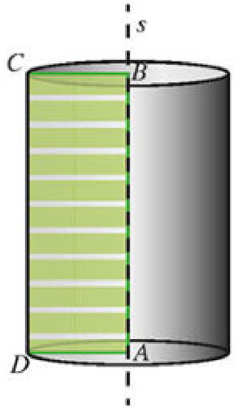
¿Cuáles son los sólidos geométricos que se generan al girar un rectángulo, un triángulo rectángulo o un semicírculo alrededor de un eje?

Analicen los giros y describan el sólido generado en cada caso.

1. La recta *s* es el **eje de rotación** y la figura que gira es el rectángulo.

$\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ son los radios del cuerpo geométrico generado, llamado cilindro recto. Las bases de éste son los círculos generados por los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$. A $\overline{CD}$ se le llama **generatriz** del cilindro, y $\overline{AB}$ es la altura del cilindro.

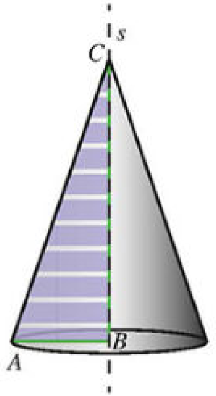
a) Escriban cómo definirían el cilindro circular recto.



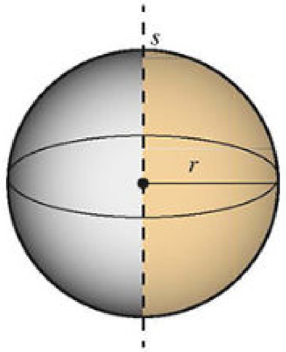
Glosario

eje de rotación. Es la línea recta que permanece fija durante la rotación.

generatriz. Es la línea en movimiento que genera una figura o un sólido geométrico.



2. La figura que gira es un triángulo rectángulo.
   a) ¿Cómo se genera la base del cuerpo geométrico?
   b) ¿Cuál es la generatriz de este sólido?
   c) ¿Qué nombre reciben los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$?
   d) Anoten en su cuaderno cómo definirían el cono circular recto.



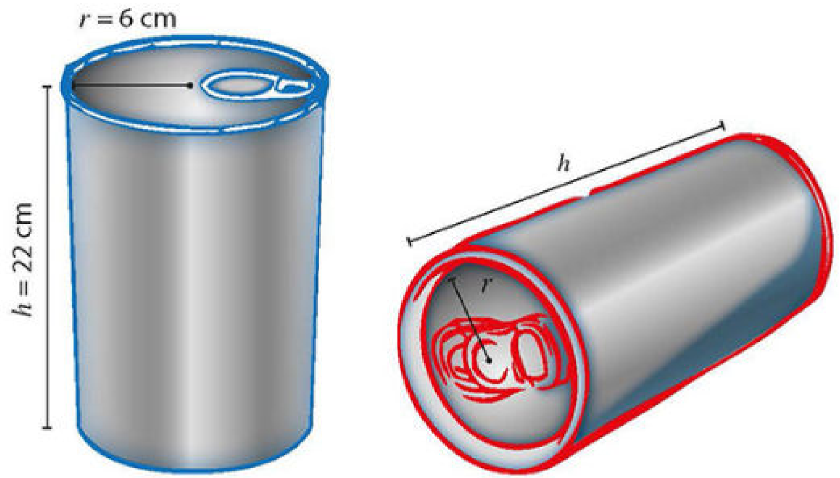
3. La figura geométrica que gira es un semicírculo. Analicen la figura de la derecha y redacten una explicación de cómo definirían al sólido geométrico denominado esfera.

Comunico

Presenta tus definiciones al profesor y organicen una actividad grupal para que analicen todas las definiciones elaboradas por los integrantes del grupo.

¿Cómo se obtiene el desarrollo plano de un cilindro?

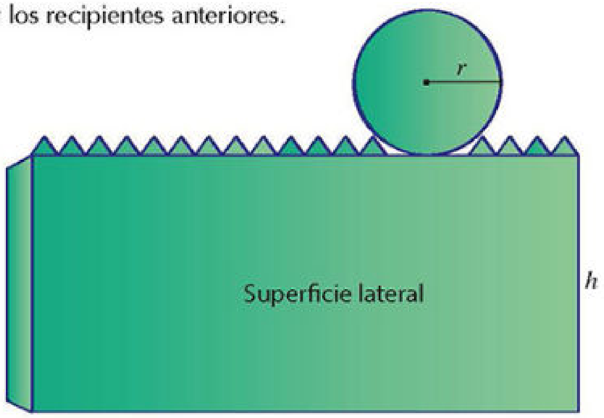
1. Calculen el área del material necesario para fabricar cada uno de los recipientes con forma de cilindro circular recto sin considerar las argollas para abrirlas.



2. Describan un procedimiento para hacer los recipientes anteriores.

3. Usen cartulina para construir los recipientes.

Eladio y Dulce han trazado parte de una plantilla para construir un cilindro, termina de construirla.



La plantilla es el desarrollo plano del cilindro.

El rectángulo de la plantilla se conoce como superficie lateral del cilindro. ¿Qué fórmula puedes usar para calcular el área lateral del cilindro?, ¿y para el área de cada una de las bases?

Generalizo

Si el área total del cilindro es la suma del área lateral más el área de las bases, entonces la fórmula para calcularla es la siguiente:

$$\text{Área total} = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

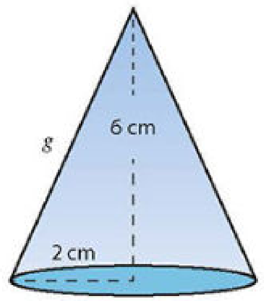
$\pi \cong 3.1416$ $\quad r$ = radio del cilindro $\quad h$ = altura del cilindro

¿Cómo se construye el desarrollo plano de un cono circular recto?

Realicen las actividades que se indican.

1. Tracen un cono en el que $r = 3$ cm y $h = 7$ cm.

2. Describan cómo trazaron el desarrollo plano del cono.



A Rosa le encargaron que hiciera un cono a partir de los datos: $r = 2$ cm y $h = 6$ cm.

Para ello, consultó un libro de geometría y encontró el desarrollo plano de un cono; observó una figura como la del lado derecho.

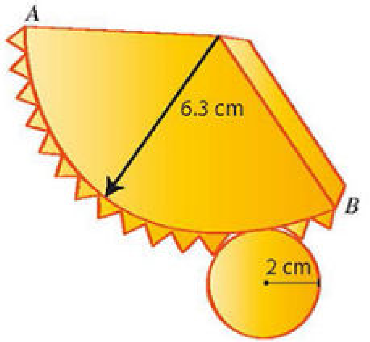
Para obtener la base de un cono, hay que trazar una circunferencia.

En este caso, la circunferencia que se debe trazar tiene un radio igual a 2 cm.

Para trazar el sector circular se debe calcular el valor de g, que será la longitud del radio del sector.

Analiza y explica la siguiente fórmula; posteriormente, responde lo que se solicita.

$$g = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} \cong 6.3 \text{ cm}$$



¿Consideras que ya puedes dibujar el desarrollo plano del cono y armarlo?

¿Cuánto debe medir el arco $\widehat{AB}$ del sector circular?, ¿qué se puede hacer para lograr que el arco tenga la medida necesaria para cubrir toda la circunferencia de la base?

¿Qué parte de la circunferencia de radio 6.3 cm tendrá la misma longitud que la circunferencia de radio 2 cm?

¿Se puede usar la proporción $\frac{12.6\pi}{360°} = \frac{4\pi}{x°}$? ¿Por qué?

Al resolver la proporción, se obtiene el valor de x. Calcúlalo.

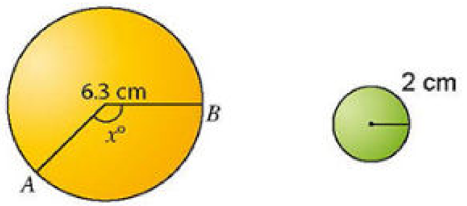
¿Cuánto mide aproximadamente el ángulo x del sector circular?

Construye un cono como el que le encargaron a Rosa.

Actividad extraclase

Realiza una investigación bibliográfica sobre otras capacidades para plantear y resolver problemas en: *Apuntes de matemáticas*, Roser Codina, Carmen Burgués y Manuel Montanuy que puedes encontrar en tu Biblioteca de Aula o Escolar (Libros del Rincón).

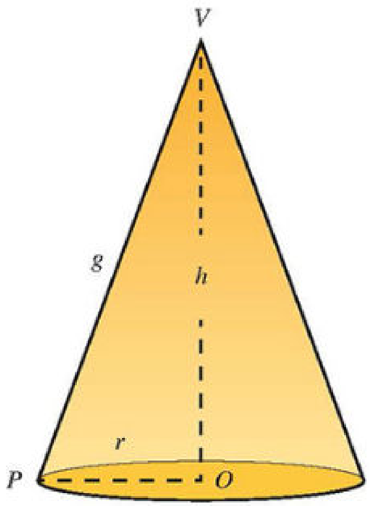
Seleccionen algunos de los problemas que se resuelven en el libro *Apuntes de matemáticas* y compartan sus soluciones ante el grupo para que las validen o corrijan.



$C = 2\pi(6.3)$ cm $\qquad C = 2\pi(2)$ cm

Cálculo de la altura, el radio y la generatriz de un cono

Agustín, Pablo y Rosalinda se dieron cuenta de que se puede usar el teorema de Pitágoras para calcular algunos de los elementos de un cono circular recto, ya que éste se genera al girar un triángulo rectángulo. Agustín calculó la generatriz teniendo como datos el radio de la base y la altura del cono.



Como la generatriz g es la hipotenusa del triángulo rectángulo ΔPOV, mientras que el radio y la altura son sus catetos. ¿Cómo se puede expresar la hipotenusa?

$g^2 =$ ______________

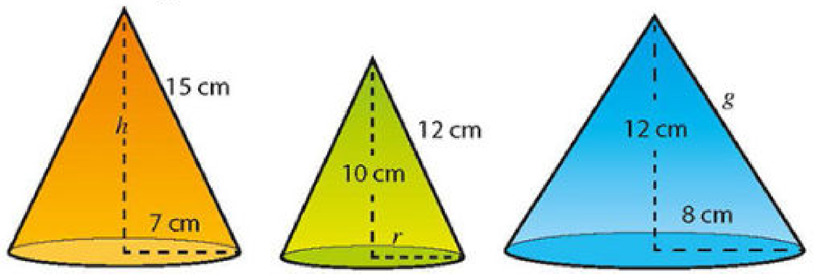
$g =$ ______________

Analiza y resuelve lo que se indica a continuación.

- El cuadrado de la generatriz de un cono es igual a:
- Despejando g se obtiene $g = \sqrt{r^2 + h^2}$. ¿Cuál es el valor de g si $r = 8$ m y $h = 12$ m?
- Pablo calculó la altura, teniendo como datos la longitud del radio y la longitud de la generatriz. De la fórmula $g^2 = r^2 + h^2$ despejó a la variable h. Completa la igualdad:
  $$h = \sqrt{g^2 - \quad}$$
- ¿Cuál es el valor de h si $g = 20$ m y $r = 6$ m?
- La altura de un cono es igual a…
- Rosalinda calculó el radio de la base de un cono sabiendo que: $h = 11$ m y que $g = 18$ m. ¿Qué fórmula usó para calcular el radio? ¿Cuál es el valor de r?
- El radio de la base de un cono es igual a…

Aplico

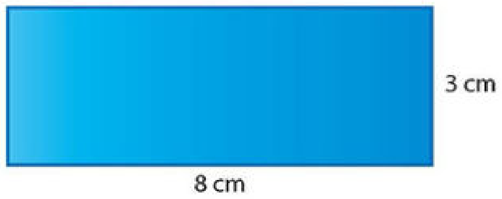
Calcula la incógnita en cada cono.



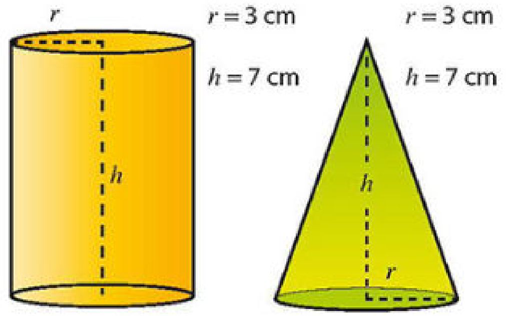
EVALUACIÓN FORMATIVA

Para que verifiques tus conocimientos y habilidades sobre los cuerpos geométricos y desarrolles tus competencias matemáticas realiza lo que se indica en cada caso.

1. Calcula el área total de los dos cilindros que se pueden generar a partir del rectángulo de la figura. ¿Para cuál cilindro se requiere menor cantidad de material para formarlo?



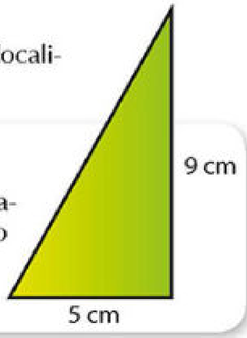
2. Construye desarrollos planos para armar un cono y un cilindro recto con las longitudes señaladas en las figuras.



3. Justifica la afirmación: "Todos los puntos en la superficie de una esfera se localizan a la misma distancia del centro de la esfera".

Comunico

Redacta un escrito en el que describas los dos conos circulares rectos que se puedan generar con el triángulo rectángulo de la derecha.



Habilidades digitales

Con el propósito de que conozcas otros elementos de los sólidos de revolución, realiza una búsqueda en internet. Puedes comenzar ingresando a la siguiente dirección electrónica:
www.cuadernosdigitalesvindel.com/juegos/aprender_volumen.php
(Consulta: 12 de enero de 2015).

Medida

Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente

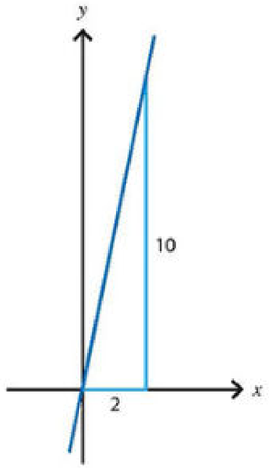
Bloque CUATRO

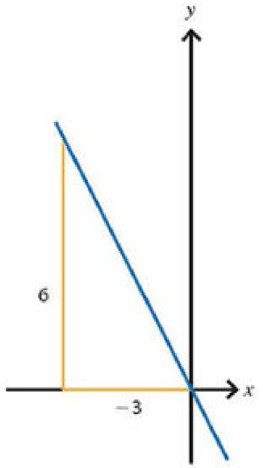
ACTIVIDADES INICIALES

Triángulos y rectas en el plano cartesiano

Rebeca y Javier desean relacionar sus conocimientos sobre triángulos rectángulos con expresiones algebraicas que representan rectas.

Ellos afirman que la recta queda bien definida cuando se traza un triángulo rectángulo que la represente de manera adecuada.



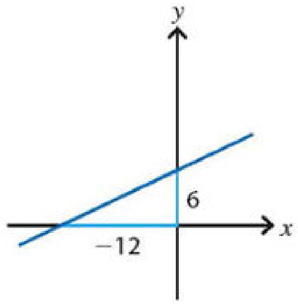


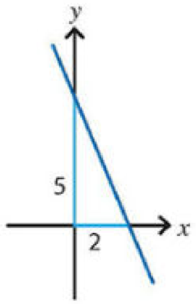
Analiza las figuras que trazaron Javier y Rebeca; después, realiza las siguientes actividades.

1. Describe el triángulo rectángulo asociado a cada recta. Posteriormente, explica el procedimiento utilizado.

2. Escribe la expresión algebraica que corresponde a cada recta

Tracen estas gráficas en sus cuadernos y escriban la expresión algebraica que represente a cada recta.





Soliciten al profesor que valide sus respuestas.

CONSTRUYO MIS CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES

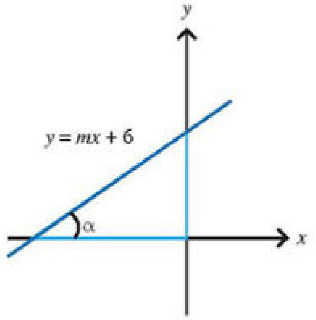
Relación entre el valor de la pendiente de una recta y el ángulo de inclinación de la recta

Glosario

ángulo de inclinación (de una recta). Ángulo α que forman la recta y el eje de las abscisas.

pendiente (de una recta). Valor m de la expresión algebraica de la recta: $y = mx + b$.

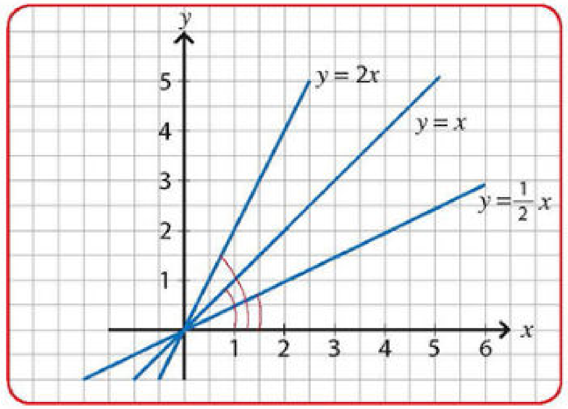
Justino y Marcela pretenden conocer, de manera aproximada y con base en mediciones directas sobre figuras trazadas, la relación que hay entre la **pendiente** m de la recta y el **ángulo de inclinación** α de una recta. Para ello trazan varias rectas de pendiente conocida y miden el valor correspondiente para α.



Para que conozcan la relación entre el valor de la pendiente m y el ángulo de inclinación α de una recta, realicen lo que se solicita a continuación.

1. Usen papel cuadriculado para trazar rectas con diferentes pendientes.

2. Con un transportador, midan los ángulos de las rectas con el eje de las abscisas y completen los datos de la tabla. Si es necesario, utilicen sus calculadoras.



Pendiente	1/2	0.75	1	2	3	4	8	10
Inclinación α								

3. Analicen las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta y el ángulo que forma la recta con el eje x; posteriormente, respondan lo que se solicita.

   a) ¿Cuál es el valor para el ángulo de inclinación α cuando la pendiente de la recta es $m = 0$?
   b) ¿Qué sucede con el valor de α cuando el valor de m se torna muy grande? Por ejemplo, $m = 100$ o $m = 1000$.
   c) ¿Qué posición tendría la recta cuando el ángulo de inclinación sea de 90º? ¿Cuál será el valor de m en ese caso?

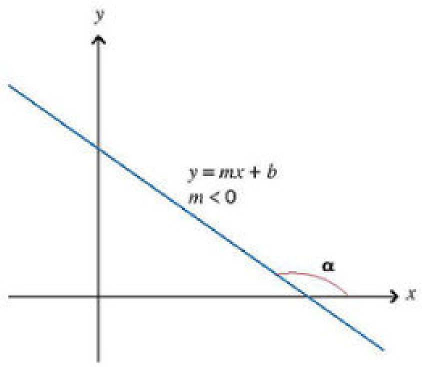
Presenten sus respuestas al profesor para que las revise y valide.

Comprendo

Si $m = 0$, entonces la expresión $y = mx + b$ se transforma en la expresión $y = b$.

Bloque **CUATRO**

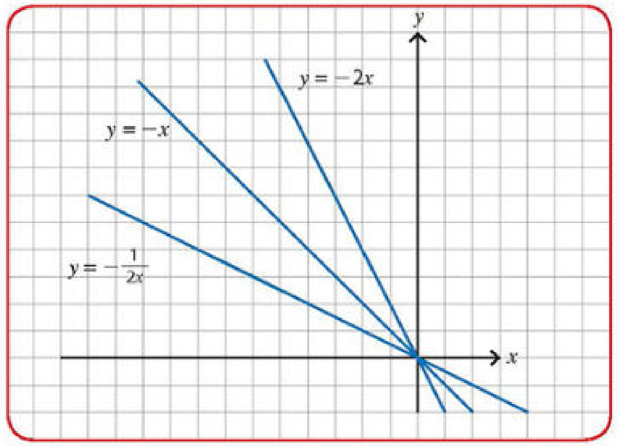
Marcela y Justino continúan con el análisis de las relaciones entre la pendiente m de una recta y su ángulo de inclinación α. Ahora trazan una recta en la que m es un número negativo y desean saber cuáles son los valores posibles para el ángulo de inclinación α.



Para que respondas la interrogante de Marcela y Justino, realiza las siguientes actividades.

1. Traza rectas con diferentes valores negativos para la pendiente m.

2. Mide los ángulos de inclinación α de las rectas y completa la tabla.



Pendiente	−1/2	−0.75	−1	−2	−3	−5	−8	−10
Inclinación α								

3. Analiza las relaciones entre el valor de la pendiente m de una recta y su ángulo de inclinación α; después responde las preguntas:

   a) ¿Qué se puede afirmar sobre el valor de m, cuando el valor de α se acerca a los 90°?
   b) ¿Cuál es el valor de m correspondiente a un valor de $\alpha = 180°$?

Presenta tus respuestas al profesor para que las revise y valide.

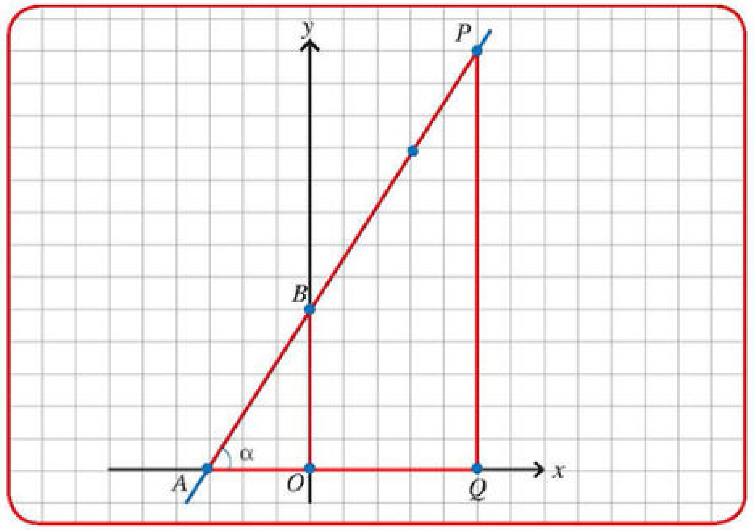
¿Qué relación existe entre el valor de la pendiente m y las figuras que se forman con los puntos importantes de una recta?

Para responder la pregunta anterior, se requiere analizar la figura que se obtiene al representar de manera gráfica una expresión algebraica de la forma $y = mx + b$; por ejemplo: $y = \frac{5}{3}x + 5$

Reproduzcan la figura que representa a $y = \frac{5}{3}x + 5$ y realicen lo que se solicita.

1. Calculen las coordenadas que hacen falta para los puntos de la figura trazada.

   $A(\quad, 0)$ $B(0, \quad)$ $O(0, \quad)$ $Q(5, \quad)$ $P(5, \quad)$



2. Analicen los elementos de los triángulos rectángulos formados en la figura anterior y justifiquen las siguientes igualdades:

En el ΔAQP:

$$\frac{\text{Cateto opuesto a } \square}{\text{Cateto adyacente a } \square} = \frac{\overline{QP}}{\overline{AQ}}$$

$$\frac{\overline{QP}}{\overline{AQ}} = \frac{\square}{\square}$$

En el ΔAOB:

$$\frac{\text{Cateto opuesto a } \square}{\text{Cateto adyacente a } \square} = \frac{\square}{\square}$$

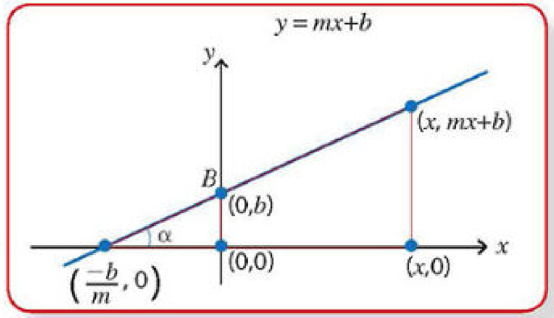
$$\frac{\overline{OB}}{\overline{AO}} = \frac{\square}{\square}$$

3. Escriban una conclusión al respecto.

Generalizo

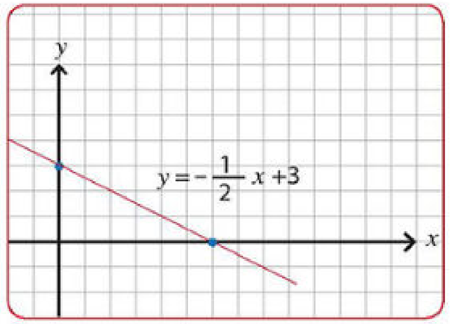
Usa la figura para justificar la siguiente igualdad que se cumple en una recta.

$$m = \frac{\textit{Cateto opuesto}}{\textit{Cateto adyacente}}$$

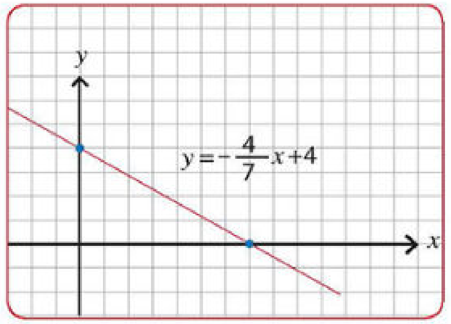


Analiza las relaciones entre la pendiente m, el ángulo de inclinación α, y el cociente del cateto opuesto y el cateto adyacente para que realices lo que se solicita a continuación.

Completa los datos que hagan falta en cada figura y verifica que se cumple la igualdad indicada.



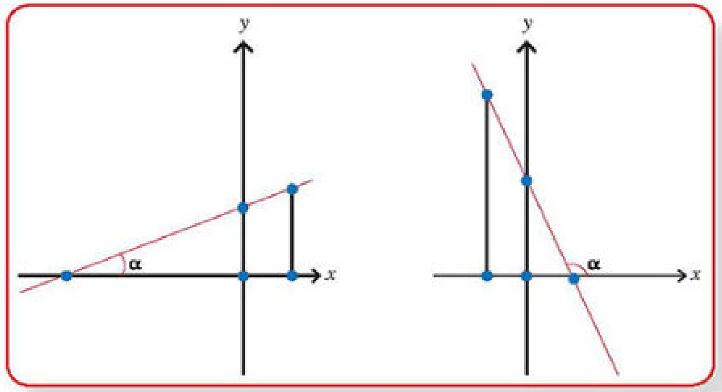
$$m = \frac{\textit{Cateto opuesto}}{\textit{Cateto adyacente}}$$



$$m = \frac{\textit{Cateto opuesto}}{\textit{Cateto adyacente}}$$

Aplico

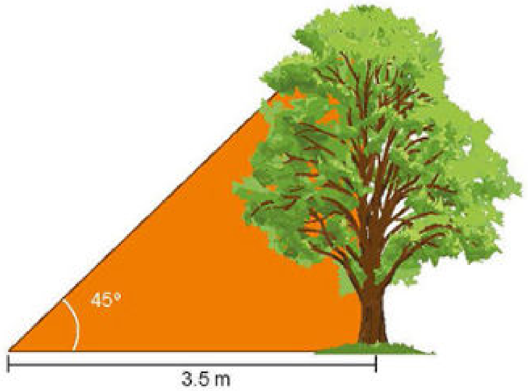
Traza en tu cuaderno las figuras, mide los ángulos y segmentos necesarios y calcula los valores de las pendientes que corresponden a cada recta.



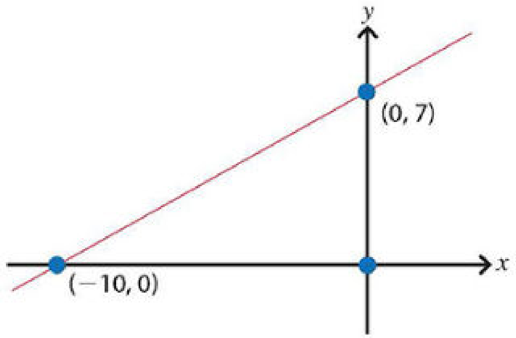
$\alpha =$ $m =$ $\alpha =$ $m =$

Analiza cada uno de los siguientes enunciados para que realices lo que se solicita en cada caso.

1. Usa la figura que trazó Álvaro para calcular la altura del árbol.



2. Justifica la siguiente afirmación: "La expresión algebraica $y = \frac{7}{10}x + 7$ representa a la recta de la figura".



3. Calcula el valor aproximado para el ángulo de inclinación α de la recta representada por la expresión algebraica $y = 10x + 4$.

4. Construye y describe un procedimiento para calcular, el valor de la pendiente m de la recta cuando se conoce su ángulo de inclinación.

α	50°	60°	80°
m			

Presenta tus resultados al profesor para su revisión y validación.

Habilidades digitales

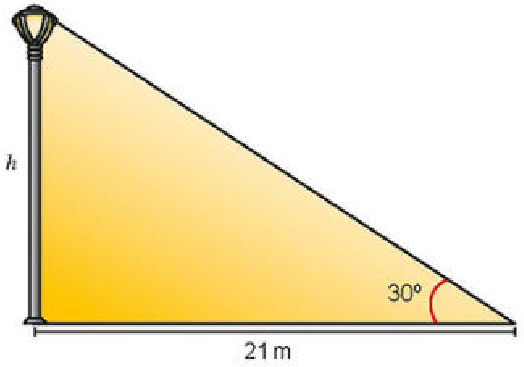
A fin de conocer más acerca de ángulos de inclinación y la pendiente, realiza una investigación en internet; puedes comenzar ingresando a la siguiente dirección electrónica:
http://www.thatquiz.org/es/practicetest?7w29b4dxave8
(Consulta: 18 de junio de 2014).
Enumera las semejanzas que observas con lo que has estudiado en este tema.

Medida

Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo

ACTIVIDADES INICIALES

Cálculo de la altura de un poste



María pretende calcular la altura h de un poste de luz.

Así que fue al lugar donde está el poste y obtuvo los siguientes datos. La longitud de la sombra del poste es de 21 m, mientras que el **ángulo de elevación** desde el suelo hacia el poste es de 30°.

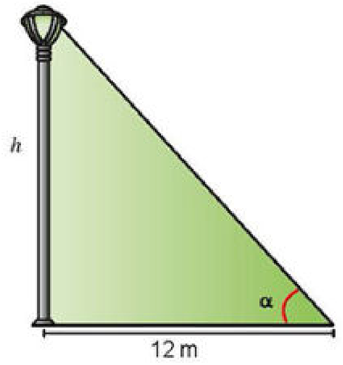
Glosario

ángulo de elevación. Ángulo formado por la horizontal del observador y el lugar que se observa cuando éste se encuentra por arriba del observador.

¿Cuál es la altura aproximada del poste? Traza en tu cuaderno un triángulo congruente con el de la figura anterior y aplica tus conocimientos para obtener la respuesta.

Jaime también tomó algunas medidas relacionadas con el mismo poste.

Expliquen la razón por la que se modificó la longitud de la sombra del poste y realicen lo que se solicita a continuación.



1. Calculen la magnitud del ángulo de inclinación de los rayos de luz del poste, representado por el ángulo agudo α del triángulo rectángulo de la figura de la izquierda.
2. Describan el procedimiento seguido en la actividad 1 y compárenlo con los procedimientos usados por otros compañeros.
3. Calculen la razón que se obtiene al comparar la altura con la sombra en los dos casos.
4. ¿De qué depende el valor de la razón que se obtiene al comparar la longitud de la altura del poste con la sombra que proyecta en el suelo?

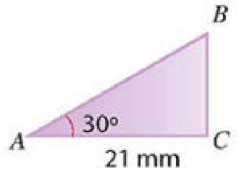
Presenten sus resultados al profesor para su validación.

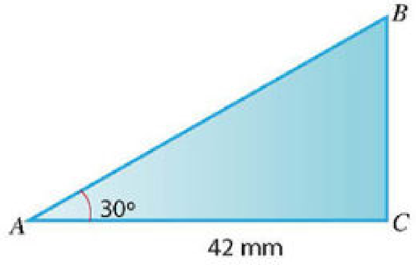
CONSTRUYO MIS CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES

Cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo

Compara los procedimientos que seguiste para solucionar los problemas planteados por María y Jaime, con los que se presentan a continuación.

María trazó varios triángulos. Comenzó con los segmentos $\overline{AC}$.
Explica por qué utilizó las medidas indicadas para $\overline{AC}$ en cada figura.
Continuó con ángulos agudos de 30°. Finalmente trazó perpendiculares a $\overline{AC}$ a partir del punto C.





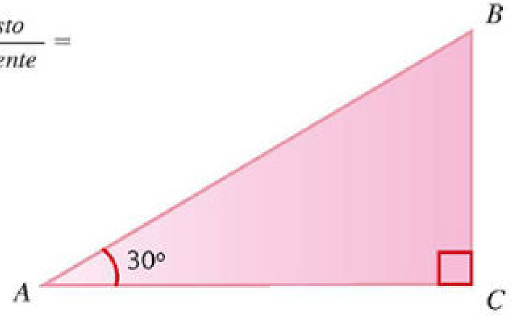
Señala cómo se puede determinar la altura del poste.

¿Obtuviste el mismo resultado que en las actividades de la página anterior?

Tracen otros triángulos rectángulos con un ángulo agudo de 30° y realicen las siguientes actividades.

1. Midan las longitudes del cateto opuesto y del cateto adyacente para el triángulo rectángulo y calculen el cociente indicado.

$$\frac{\textit{Cateto opuesto}}{\textit{Cateto adyacente}} =$$



2. Escriban una conclusión al respecto.
3. Repitan las actividades 1 y 2 para un ángulo agudo de 50°, en un triángulo rectángulo.

Analiza las respuestas obtenidas y explica de qué depende el valor de la razón:

Justifica tu respuesta.

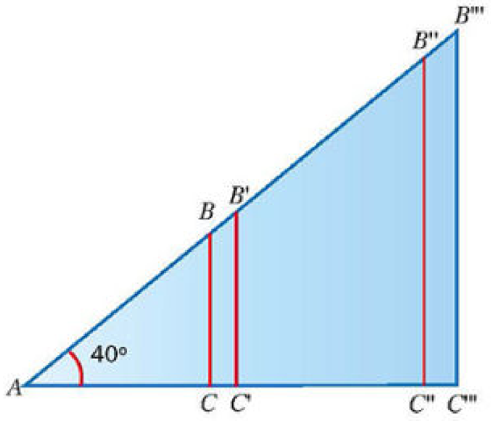
Cociente entre el cateto opuesto a un ángulo agudo y la hipotenusa en un triángulo rectángulo

Para continuar con el estudio de razones entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo se trazará un ángulo agudo A de 40°.

Sobre la hipotenusa del triángulo se marcarán los puntos B, B', B'' y B'''. Desde los cuales se trazan líneas rectas perpendiculares hacia el cateto.

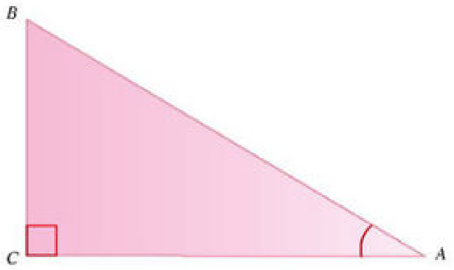
¿Cómo se podrían justificar las igualdades entre las razones?

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{B''C''}}{\overline{AB''}} = \frac{\overline{B'''C'''}}{\overline{AB'''}}$$

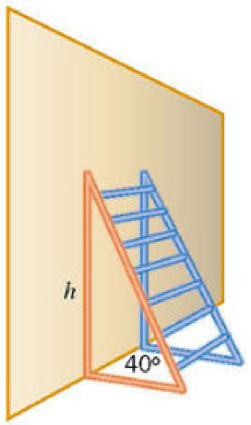


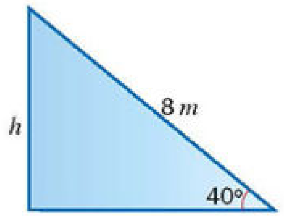
Comprendo

La razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa depende de la magnitud del ángulo, no del tamaño del triángulo.

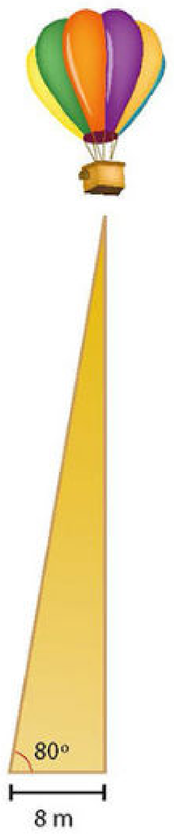


Calcula la altura que alcanzará sobre la pared una escalera de 8 m de longitud, que se coloca de tal manera que forma un ángulo de 40° con la horizontal del suelo.





Cociente entre el cateto adyacente a un ángulo agudo y la hipotenusa en un triángulo rectángulo



¿Cómo se puede resolver el siguiente problema? Se debe calcular la longitud del cable que sostiene al globo de una feria. El cable se encuentra atado a ras de suelo y forma un ángulo de 80°, mientras que la vertical del globo se observa a 8 m del punto donde está sujeto.

El maestro Roberto explica que los lados involucrados en el problema son la hipotenusa y el cateto adyacente al ángulo de 80°. Por tanto, se requiere obtener otra razón entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo; la cual es:

$$\frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$$

Pedro escribe $\frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{8}{x}$ y dice "Para resolver el problema es necesario conocer el valor de la razón $\frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$ cuando el ángulo es de 80°".

El maestro Roberto aclara que más adelante se contarán con mejores procedimientos para conocer esta razón para ángulos de varias magnitudes, pero que, por el momento, se puede usar el valor 0.17 para resolver el problema.

Realiza las siguientes actividades.

1. Traza las figuras necesarias para medir y calcular los valores que faltan en la tabla.
2. Resuelve el problema del globo.

Magnitud de $\measuredangle A$	$\frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$
55°	
72°	
80°	

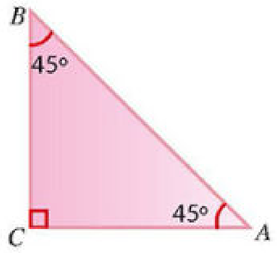
Comunico

Usa el triángulo de la derecha para calcular las razones indicadas. En este caso el ángulo agudo es de 45°.

$$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} =$$

$$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} =$$

$$\frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}} =$$

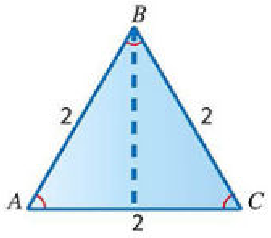


Comenta con tus compañeros los resultados que obtuviste.

Valores de las razones entre los lados de un triángulo rectángulo para ángulos agudos de 30°, 45° y 60°

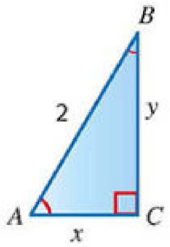
Analicen las siguientes situaciones y realicen lo que se solicita.

1. Tracen una figura como la siguiente y determinen los valores faltantes.



$\measuredangle A =$
$\measuredangle B =$
$\measuredangle C =$

2. Tracen la mitad del triángulo equilátero anterior y completen los datos necesarios.



$\measuredangle A =$
$\measuredangle B =$
$x =$
$y =$

3. Calculen los valores de las razones que correspondan a cada uno de los ángulos del triángulo anterior. Agreguen los datos que hagan falta en cada tabla.

$\measuredangle A = 60°$
$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} =$
$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} =$
$\frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}} =$

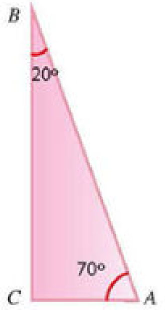
$\measuredangle A = 65°$
$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} =$
$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} = 2.144$
$\frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}} =$

$\measuredangle B = 30°$
$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} =$
$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} =$
$\frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}} =$

$\measuredangle B = 25°$
$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = 0.4226$
$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} =$
$\frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}} =$

Presenten sus resultados al profesor para su validación.

Realiza lo que se solicita en cada caso.

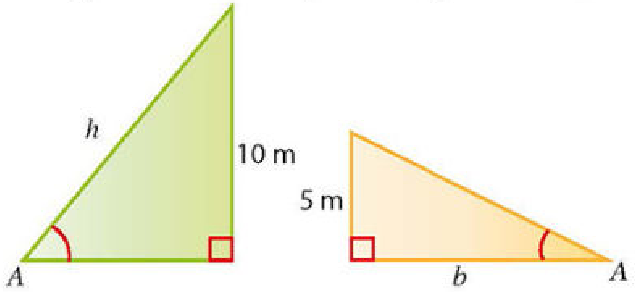


1. Calcula los cocientes indicados de acuerdo con los datos de la figura.

70°
$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} =$
$\frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}} =$

20°
$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} =$
$\frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}} =$

2. Ahora, calcula las longitudes señaladas respecto al ángulo marcado, en cada figura.



3. Encuentra el error en las siguientes relaciones referentes a un triángulo rectángulo y justifica tu respuesta.

$$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} = 2 \qquad \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} = 1 \qquad \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = 1.5 \qquad \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = 0.75$$

4. Escribe el enunciado de una situación que se pueda resolver con algunas razones entre los lados de un triángulo rectángulo, y presenta los resultados a tu profesor.

Habilidades digitales

Para que realices otras actividades relacionadas con el tema de cocientes formados por los lados de un triángulo rectángulo, ingresa a la siguiente dirección electrónica:
http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/t04_rrtt-90.htm
(Consulta: 11 de agosto de 2014).
Elabora un resumen y entrégalo al profesor.

Medida

Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente

ACTIVIDADES INICIALES

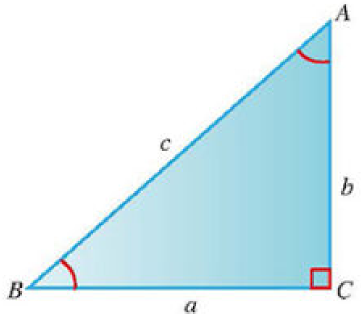
Razones trigonométricas

Mauricio y Esther investigaron acerca de las razones entre los lados de los triángulos rectángulos y encontraron lo siguiente:

$$sen\,\square = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} \qquad cos\,\square = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}} \qquad tan\,\square = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$$

sen = seno $\qquad cos$ = coseno $\qquad tan$ = tangente

Tracen en sus cuadernos un triángulo rectángulo como el de abajo y usen las literales para expresar las razones trigonométricas de los ángulos A y B.



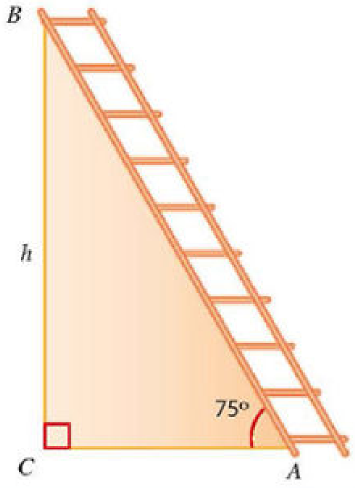
$sen\,A$= ______ $\qquad sen\,B$= ______

$cos\,A$= ______ $\qquad cos\,B$= ______

$tan\,A$= ______ $\qquad tan\,B$= ______

Analiza las definiciones de las razones trigonométricas y resuelve los problemas.

1. Sabiendo que sen 75° = 0.9659 ¿Cuál es la altura que alcanza una escalera de 9 m de longitud si se coloca de tal manera que forme un ángulo de 75° con la horizontal del piso?
2. Calcula la distancia $\overline{AC}$ que se debe utilizar para que la escalera y el suelo formen un ángulo de 58°. Utiliza el dato $cos\ 58° = 0.5299$.

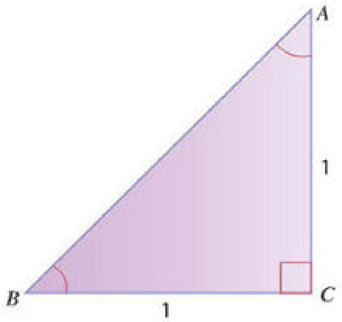


Presenten los resultados al profesor para que los revise y valide.

CONSTRUYO MIS CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES

¿Cómo se obtienen los valores de las razones trigonométricas?

Con base en las siguientes figuras calcula los valores de las razones trigonométricas para los ángulos de 30°, 45° y 60°.



$sen\ 45°$ = ______

$cos\ 45°$ = ______

$tan\ 45°$ = ______

$sen\ 60°$ = ______

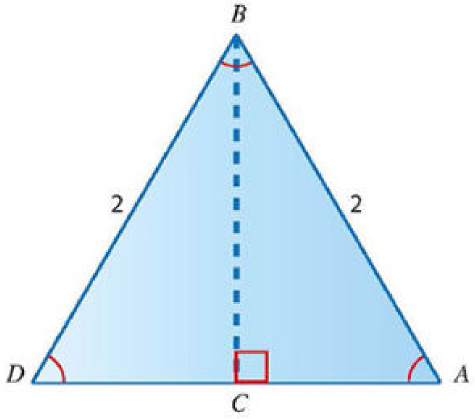
$cos\ 60°$ = ______

$tan\ 60°$ = ______

$sen\ 30°$ = ______

$cos\ 30°$ = ______

$tan\ 30°$ = ______



Utilicen papel milimétrico para reproducir la figura que aparece a continuación y realicen las siguientes actividades.

1. Verifiquen los valores para las razones trigonométricas de un ángulo de 50°.

   $sen\ 50° = 0.77$

   $cos\ 50° = 0.64$

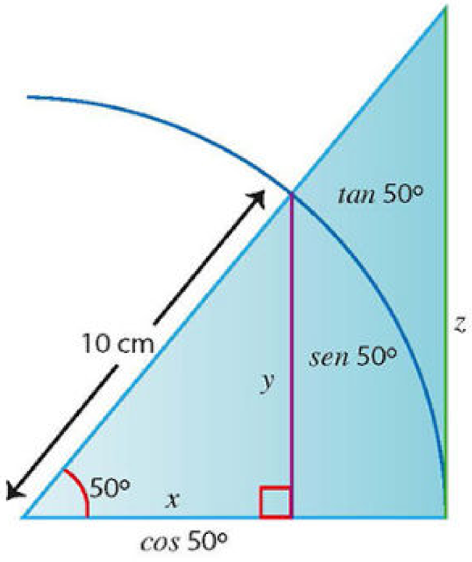
   $tan\ 50° = 1.20$

2. Justifiquen que las siguientes igualdades se cumplen para los ángulos agudos si el radio del círculo es 1.

   $x = cos\,\square$

   $y = sen\,\square$

   $z = tan\,\square$

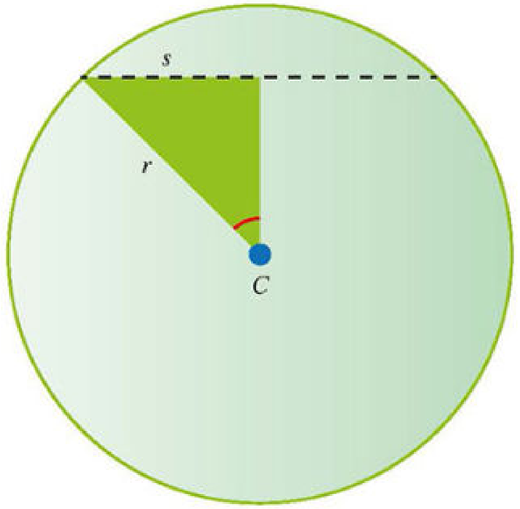


3. Tracen las figuras necesarias para calcular los valores de las razones trigonométricas de los ángulos agudos; calculen, por ejemplo las razones de 25°, 44°, 70° y 80°.

Tablas de valores de las razones trigonométricas

La trigonometría es la rama de las matemáticas que estudia las relaciones numéricas entre los ángulos y los lados de las figuras geométricas. Los griegos relacionaban las magnitudes de los ángulos centrales en una circunferencia con la longitud de la cuerda correspondiente a dichos ángulos. El astrónomo Hiparco utilizó las relaciones trigonométricas para calcular distancias entre los astros. Los astrónomos de la India comenzaron a usar la mitad de la cuerda y el radio de la circunferencia para obtener una razón equivalente a la relación seno que se ha elaborado en este bloque.

En la actualidad, las relaciones $sen\ A$, $cos\ A$, $tan\ A$ y otras similares se conocen como razones trigonométricas.



$sen\ C = \frac{s}{r}$

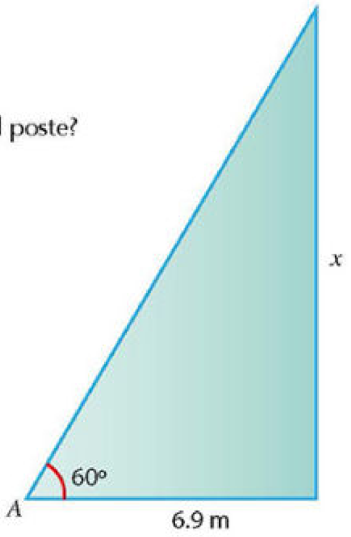
Dada la necesidad de conocer los valores de las razones trigonométricas para diferentes valores de las magnitudes de los ángulos agudos, se suelen usar tablas, o bien, la calculadora para determinarlos.

¿Recuerdas la figura del problema de María sobre el cálculo de la altura de un poste?

¿Qué valor se obtiene para x si usamos $tan\ 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{21}$? Compara tu resultado con el que obtuvo María.

¿Puedes usar la misma figura que se utilizó para obtener los valores $sen\ 60°$, $cos\ 60°$ y $tan\ 60°$?

¿Cuál será la solución del problema de María si se incluyen los datos de la figura?



Si $tan\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{1}$, ¿qué valor podemos obtener para la altura del poste?

$$tan\ 60° = \frac{Cateto\ opuesto}{Cateto\ adyacente} = \frac{x}{69}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{x}{6.9} \quad x = (\sqrt{3})(69) \cong 11.95$$

¿Por qué los resultados de María no son iguales?

Recuerda que el maestro Roberto anticipó que los valores de las razones trigonométricas se podían obtener de una tabla; en la siguiente página se presenta la tabla de valores para las razones trigonométricas de ángulos agudos cuyos valores se encuentran entre 0° y 90°.

A continuación se incluye una parte de dicha tabla. Una vez que se determinan la magnitud del ángulo y la razón trigonométrica que se requiere, se localiza el valor del ángulo en la primera columna, y en la columna con el nombre de la razón se encuentra el valor.

Observa cómo se obtuvieron los valores de $sen\ 5°$, $tan\ 8°$ y $cos\ 12°$.

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
1°	0.0175	0.9998	0.0175
2°	0.0349	0.9994	0.0349
3°	0.0523	0.9986	0.0524
4°	0.0698	0.9976	0.0699
5°	0.0872	0.9962	0.0875
6°	0.1045	0.9945	0.1051
7°	0.1219	0.9925	0.1228
8°	0.1392	0.9903	0.1405
9°	0.1564	0.9877	0.1584
10°	0.1736	0.9848	0.1763
11°	0.1908	0.9816	0.1944
12°	0.2079	0.9781	0.2126

$sen\ 5° = 0.0872$

$tan\ 8° = 0.1405$

$cos\ 12° = 0.9781$

La tabla también se emplea para resolver el problema inverso; es decir, si se conoce el valor de la razón trigonométrica, se busca éste en la columna correspondiente y el valor del ángulo estará en ese renglón. Observa la tabla y explica cómo se determinaron los siguientes ángulos A, B y C.

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
46°	0.7193	0.6947	1.0355
47°	0.7314	0.6820	1.0724
48°	0.7431	0.6691	1.1106
49°	0.7547	0.6561	1.1504
50°	0.7660	0.6428	1.1918
51°	0.7771	0.6293	1.2349
52°	0.7880	0.6157	1.2799
53°	0.7986	0.6018	1.3270
54°	0.8090	0.5878	1.3764
55°	0.8192	0.5736	1.4281

Si $cos\ A = 0.6820$ entonces $A = 47°$

Si $tan\ B = 1.1504$ entonces $A = 49°$

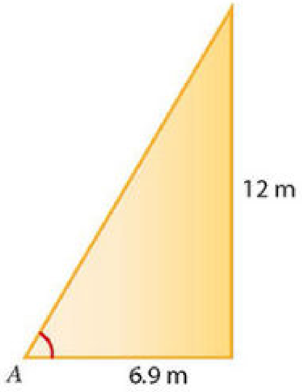
Si $sen\ A = 0.7880$ entonces $A = 52°$

Para obtener el ángulo A del triángulo de la figura se comienza con:

$$tan\ A = \frac{12}{6.9} = 1.7391$$

Si buscamos en la columna de tangente, se localiza el valor 1.7321 que es el que más se aproxima a 1.7391.

Entonces el valor de $\measuredangle A$ es de 60°.



Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
59°	0.8572	0.5150	1.6643
60°	0.8660	0.5000	1.7321
61°	0.8746	0.4848	1.8040

Realiza lo que se te solicita a continuación.

1. Consulta la tabla de valores de las razones trigonométricas de ángulos entre 0° y 90° para que determines el valor de las siguientes razones trigonométricas:

   sen 13°, *cos* 20°, *tan* 44°, *sen* 56°, *cos* 81°, *tan* 78°.

2. Usa la misma tabla para determinar la magnitud de los ángulos si se conoce el valor de una razón trigonométrica.

$sen\ A = 0.9744$ $\qquad$ $cos\ B = 0.6561$ $\qquad$ $tan\ C = 0.7536$

3. Calcula el valor de $tan\ A$ y $cos\ A$ si se sabe que $sen\ A = 0.8988$.

Valores de las razones trigonométricas de ángulos entre 0° y 90°

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
0°	0.0000	1.0000	0.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175
2°	0.0349	0.9994	0.0349
3°	0.0523	0.9986	0.0524
4°	0.0698	0.9976	0.0699
5°	0.0872	0.9962	0.0875
6°	0.1045	0.9945	0.1051
7°	0.1219	0.9925	0.1228
8°	0.1392	0.9903	0.1405
9°	0.1564	0.9877	0.1584
10°	0.1736	0.9848	0.1763
11°	0.1908	0.9816	0.1944
12°	0.2079	0.9781	0.2126
13°	0.2250	0.9744	0.2309
14°	0.2419	0.9703	0.2493
15°	0.2588	0.9659	0.2679
16°	0.2756	0.9613	0.2867
17°	0.2924	0.9563	0.3057
18°	0.3090	0.9511	0.3249
19°	0.3256	0.9455	0.3443
20°	0.3420	0.9397	0.3640
21°	0.3584	0.9336	0.3839
22°	0.3746	0.9272	0.4040
23°	0.3907	0.9205	0.4245

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
24°	0.4067	0.9135	0.4452
25°	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.4540	0.8910	0.5095
28°	0.4695	0.8829	0.5317
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249
33°	0.5446	0.8387	0.6494
34°	0.5592	0.8290	0.6745
35°	0.5736	0.8192	0.7002
36°	0.5878	0.8090	0.7265
37°	0.6018	0.7986	0.7536
38°	0.6157	0.7880	0.7813
39°	0.6293	0.7771	0.8098
40°	0.6428	0.7660	0.8391
41°	0.6561	0.7547	0.8693
42°	0.6691	0.7431	0.9004
43°	0.6820	0.7314	0.9325
44°	0.6947	0.7193	0.9657
45°	0.7071	0.7071	1.0000
46°	0.7193	0.6947	1.0355
47°	0.7314	0.6820	1.0724

Valores de las razones trigonométricas de ángulos entre 0° y 90° (continuación)

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
48°	0.7431	0.6691	1.1106
49°	0.7547	0.6561	1.1504
50°	0.7660	0.6428	1.1918
51°	0.7771	0.6293	1.2349
52°	0.7880	0.6157	1.2799
53°	0.7986	0.6018	1.3270
54°	0.8090	0.5878	1.3764
55°	0.8192	0.5736	1.4281
56°	0.8290	0.5592	1.4826
57°	0.8387	0.5446	1.5399
58°	0.8480	0.5299	1.6003
59°	0.8572	0.5150	1.6643
60°	0.8660	0.5000	1.7321
61°	0.8746	0.4848	1.8040
62°	0.8829	0.4695	1.8807
63°	0.8910	0.4540	1.9626
64°	0.8988	0.4384	2.0503
65°	0.9063	0.4226	2.1445
66°	0.9135	0.4067	2.2460
67°	0.9205	0.3907	2.3559
68°	0.9272	0.3746	2.4751

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
69°	0.9336	0.3584	2.6051
70°	0.9397	0.3420	2.7475
71°	0.9455	0.3256	2.9042
72°	0.9511	0.3090	3.0777
73°	0.9563	0.2924	3.2709
74°	0.9613	0.2756	3.4874
75°	0.9659	0.2588	3.7321
76°	0.9703	0.2419	4.0108
77°	0.9744	0.2250	4.3315
78°	0.9781	0.2079	4.7046
79°	0.9816	0.1908	5.1446
80°	0.9848	0.1736	5.6713
81°	0.9877	0.1564	6.3138
82°	0.9903	0.1392	7.1154
83°	0.9925	0.1219	8.1443
84°	0.9945	0.1045	9.5144
85°	0.9962	0.0872	11.4301
86°	0.9976	0.0698	14.3007
87°	0.9986	0.0523	19.0811
88°	0.9994	0.0349	28.6363
89°	0.9998	0.0175	57.2900

Analiza los valores de las tablas y contesta las preguntas.

1. ¿Qué sucede con el valor de $sen\ A$, si el valor de la magnitud del ángulo A crece? ¿Y qué pasa con $cos\ A$ y con $tan\ A$?

2. ¿Cómo puedes determinar los valores de sen 0°, cos 0° y tan 0°? ¿Puedes estimar los valores de sen 90°, cos 90° y tan 90°?

3. Si $sen\ A = 0.3530$, ¿cuál será el valor de A, 20° o 21°?

¿Puedes hacer una mejor estimación? Justifica tu respuesta.

Uso de la calculadora

Para trabajar con una calculadora y poder determinar los valores de razones trigonométricas, la calculadora debe tener las siguientes teclas:

sin⁻¹	cos⁻¹	tan⁻¹		
sin	*cos*	*tan*	*shift*	*MODE*

Investiga cómo puedes usar la tecla *MODE* para que la calculadora trabaje en *MODE DEG*, lo cual significa que los ángulos estarán medidos en grados.

A continuación se presenta el procedimiento para usar las teclas indicadas.

Si $A = 36°$ y pretendes calcular $\tan A$, teclea " *tan* " y cuando aparezca *tan* en la pantalla teclea el número 36 y la tecla " = " para obtener 0.7265.

$$\tan A \cong 0.7265$$

De manera semejante se procede para encontrar los valores de senos y cosenos de ángulos.

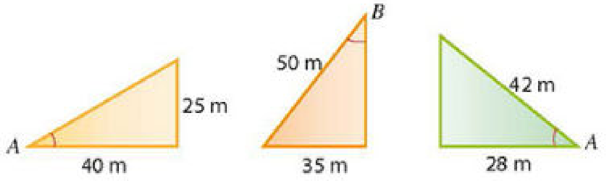
¿Cómo se obtiene $\cos 31°25'$ con la calculadora? Convertimos 25' a fracción decimal de grado dividiendo $\frac{25}{60}$, por lo que se obtiene $\cos 31.417° = 0.8534$.

Observa que junto a las teclas *sin* *cos* *tan* aparecen las expresiones $sin^{-1}, cos^{-1}, tan^{-1}$. Estas teclas se pueden usar para encontrar el valor del ángulo cuando se conoce el valor de una razón trigonométrica. Por ejemplo, si $sen\ A = 0.5422$, primero se oprimen las techas *shift* *sin* y cuando aparece sin^{-1} en la pantalla se teclea el número 0.5422 y la tecla = para obtener $A = 32.8335°$.

Aplico

Con tu calculadora realiza las actividades que se indican.

1. Obtén el valor de los ángulos señalados en las figuras. Primero debes calcular el valor de una razón trigonométrica.

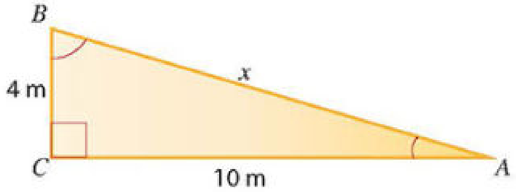


2. Calcula el valor de las razones trigonométricas. No olvides expresar los minutos como una fracción decimal de grado.
   $\cos 15°35'$ $\quad$ $sen\ 80°35'$ $\quad$ $\tan 70°30'$
3. Verifica algunos valores de las tablas de razones trigonométricas usando tu calculadora. Puedes hacerlo junto con algunos compañeros.
4. Resuelve los problemas planteados por María usando una calculadora.

¿Cómo se pueden usar las razones trigonométricas para calcular elementos desconocidos de triángulos rectángulos?

Para resolver los problemas que se presentan en este apartado se requiere calcular las razones de triángulos rectángulos. Veremos cuándo es posible hacer esto.

En este caso, conocemos las longitudes de los catetos a y b, además conocemos la magnitud del ángulo $\angle C = 90°$.



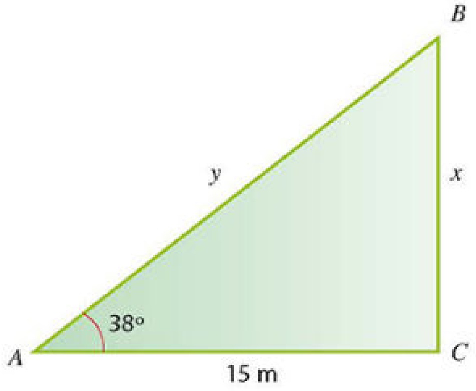
¿Cómo se puede calcular el valor de la hipotenusa?

1. Justifica que su valor sea 10.77 m.
2. ¿Cuáles son el cateto opuesto y adyacente del ángulo A?
3. ¿Puedes usar $\tan A = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$ para calcular el ángulo A?
4. Observa la siguiente conjetura: $\tan A = \frac{4}{10} = 0.4$, por tanto $\angle A = 21.8014°$, ¿cómo se obtuvo este valor?
5. Calcula el valor del ángulo $\angle B$.
6. ¿Cómo puedes comprobar los resultados para $\angle A$ y $\angle B$?
7. ¿Cuánto debe valer la suma $\angle A + \angle B$? ¿Son correctos los resultados?

Comunico

Escribe, en tu cuaderno y con tus propias palabras, el desarrollo realizado. Comunica tus respuestas al profesor.

Si se conocen los catetos de un triángulo rectángulo, es posible calcular sus ángulos.



Ahora se conoce un ángulo agudo y uno de los catetos.

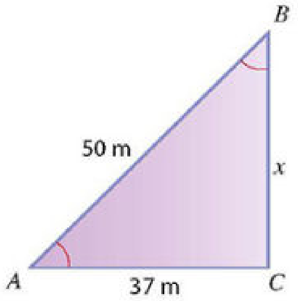
¿Puedes usar las razones $\frac{x}{15}$ y $\frac{15}{x}$ para calcular los valores de x y y?

¿Qué significan $\frac{x}{15}$ y $\frac{15}{x}$ respecto del ángulo $\angle 38°$?

Usa la expresión $\tan 38° = \frac{x}{15}$ para determinar el valor de x.

Justifica el procedimiento para calcular el valor de y.

$$\cos 38° = \frac{15}{y} \qquad 0.7880 = \frac{15}{y} \qquad y = \frac{15}{0.7880} \qquad y \cong 19.04\ m$$



Finalmente, ¿cómo puedes calcular el valor de $\measuredangle B$?

¿De qué manera puedes verificar los resultados?

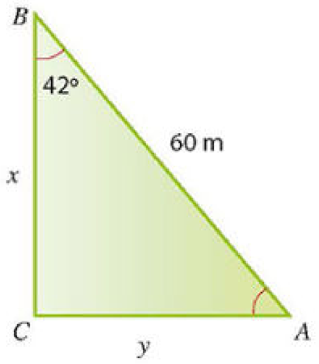
¿Qué elementos se conocen en el triángulo trazado?

Determina el valor de x.

¿Qué razón trigonométrica puedes emplear para calcular los ángulos $\measuredangle A$ y $\measuredangle B$?

¿Puedes comprobar tus resultados?

Comparen sus resultados con los de algunos compañeros.



En este caso se conoce la longitud de la hipotenusa y la magnitud de un ángulo agudo.

Según Rosa:

$$\measuredangle A + 42° = 90°$$
$$\measuredangle A = 48°$$

Expliquen lo que hizo Rosa.

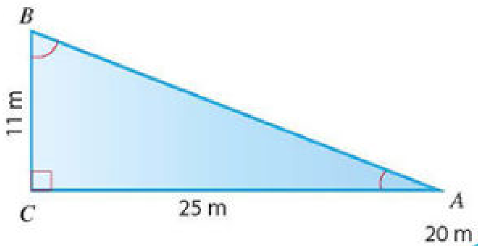
Juan determina que: $sen\ B = \frac{y}{60}$ $\qquad sen\ 42° = \frac{y}{60}$

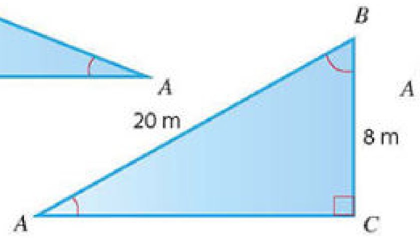
Observen las tablas de los valores trigonométricos y sustituyen $0.6691 = \frac{y}{60}$, por lo tanto, $y = 40.146$ m.

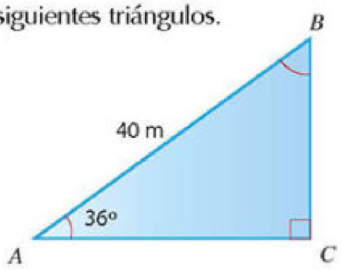
Por su parte, Elvia escribe $\cos 42° = \frac{x}{60}$; después con la calculadora obtiene $0.7431 = \frac{x}{60}$, donde se infiere que $x \cong 44.59$ m.

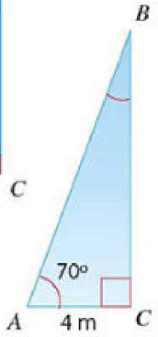
Realiza lo que se solicita a continuación.

1. Calcula los elementos que faltan en cada uno de los siguientes triángulos.





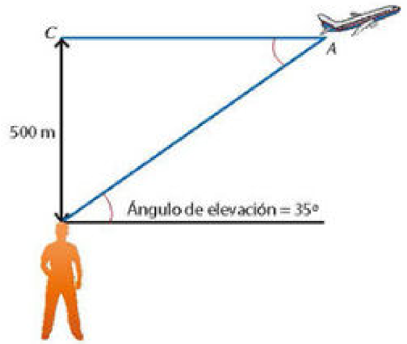




¿Cómo se pueden usar las razones trigonométricas para calcular distancias inaccesibles?

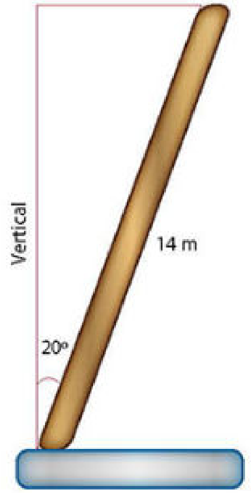
La trigonometría se emplea para calcular distancias inaccesibles como las que se presentan a continuación.

1. Un avión vuela a 500 m de altura. Arturo lo observa en el punto C de la figura y 15 segundos después lo ve en el punto A con un ángulo de elevación de 35°. ¿Con qué rapidez se mueve el avión?



¿Qué ángulo se conoce del triángulo rectángulo de la figura?

¿Cómo se puede calcular la distancia $\overline{CA}$ recorrida por el avión?



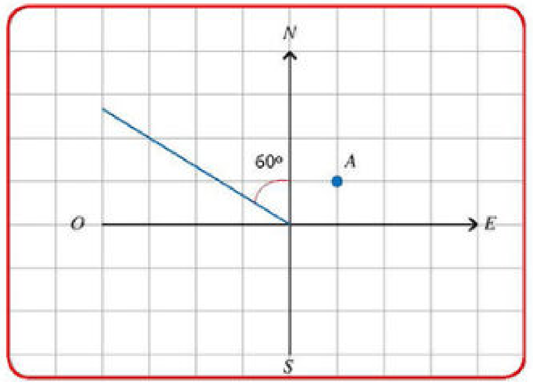
2. Un poste de teléfonos con una longitud de 14 m está inclinado 20º respecto a la vertical.

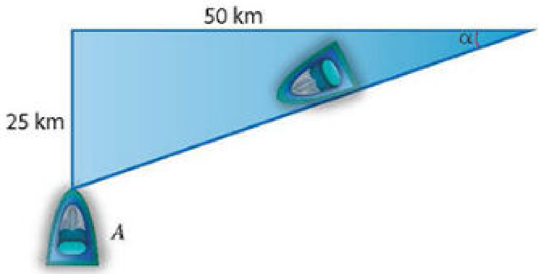
¿A qué altura del suelo se encuentra el extremo superior del poste?

¿Qué triángulo rectángulo se puede trazar para calcular la altura pedida? ¿Cuál de las razones trigonométricas se puede usar?

¿Cómo resolverías el problema?

3. En navegación, se define el rumbo de una recta como el ángulo agudo que forman la recta y la dirección norte o sur. Por ejemplo: norte 60º oeste, indica el rumbo de la recta de la gráfica.
   Un barco situado en el punto A recorre 25 km hacia el norte y 50 km hacia el este. ¿Qué rumbo tomará para regresar el punto de partida?





Bloque CUATRO

Glosario

línea de mira. Es aquella línea que va del ojo del observador al objeto que observa.

4. La **línea de mira** y la recta horizontal que pasa por el ojo del observador forman un ángulo de depresión cuando el objeto se encuentra más abajo que el observador. Por ejemplo, en la imagen inferior, un avión de reconocimiento localiza un barco en un ángulo de depresión de 39°, al mismo tiempo que otro barco se encuentra exactamente en la vertical que forma el avión con el mar. Si se sabe que la aeronave se encuentra a 4 000 m de altura, ¿qué distancia separa a los dos barcos observados?

Se puede usar $\tan \alpha$, puesto que se conoce la longitud del cateto opuesto y se va a calcular la longitud del cateto adyacente.

$$\tan 39° = \frac{4000}{x}$$

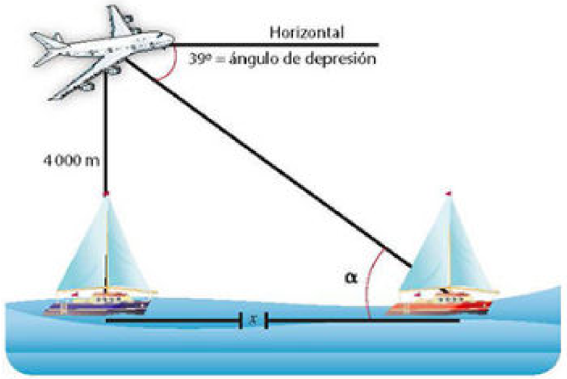
¿Cuánto mide la distancia x?

$$\tan 39° = \frac{4000}{x}$$

$$0.8098 = \frac{4000}{x}$$

$$x = \frac{4000}{0.8098}$$

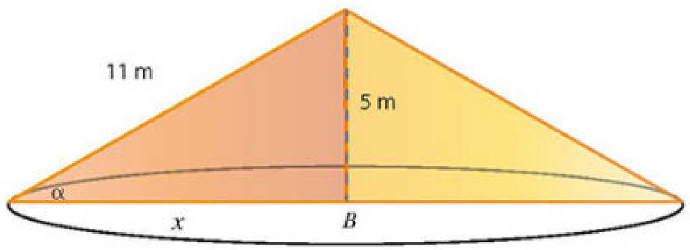
$$x = 4939.4$$



Por lo tanto, la distancia que separa a los barcos es de 4 939 m.

Resuelve los problemas que se plantean a continuación.

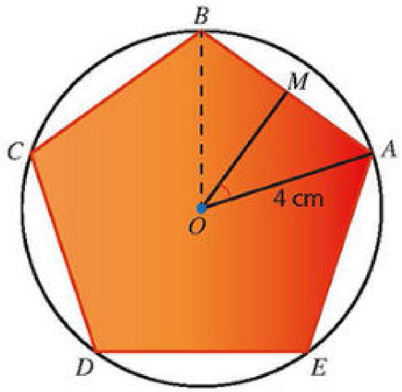
1. Una tienda de campaña tiene forma de cono y se sostiene con un tubo central de 5 m de largo; este tubo se sujeta con cuerdas de 11 m de longitud, atadas a estacas clavadas en la tierra y al extremo superior del tubo. ¿Cuál es la inclinación α de las cuerdas con respecto a la tierra? ¿A qué distancia se encuentran las estacas con relación al pie del tubo central?



2. Un arquitecto tiene que construir una rampa que se levante a 3 m del suelo. ¿Qué longitud tendrá la rampa si usa un ángulo de elevación de 40°?

Cálculo de la longitud de los lados y el apotema de polígonos regulares

Las razones trigonométricas se pueden usar para calcular segmentos que se presentan en los polígonos regulares. Veamos algunos ejemplos.



1. El perímetro de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 4 cm de radio.

La fórmula para calcular el perímetro del pentágono regular es:

$$P = 5l$$

¿Cómo se determina la longitud l de cada uno de los lados del pentágono?

Se traza $\overline{OM}$ perpendicular al lado $\overline{AB}$.

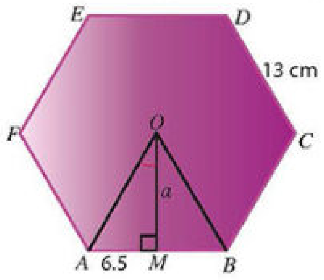
¿Por qué se puede establecer que $\overline{AM} = \overline{MB}$?

Si OMA es un triángulo rectángulo del que se conoce la hipotenusa y el ángulo agudo $\measuredangle AOM$, ¿cuánto mide $\measuredangle AOM$?

¿Qué razón trigonométrica se puede usar para calcular $\overline{AM}$?

$$sen\ \measuredangle AOM = \frac{\overline{AM}}{4} \qquad 0.5878 = \frac{\overline{AM}}{4} \qquad \overline{AM} = 2.35 \text{ cm}$$

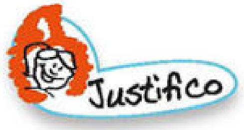
¿Cuánto mide el perímetro del pentágono regular?



2. ¿Cuál es el área de un hexágono regular sabiendo que la longitud de sus lados es, $l = 13$ cm?

Tenemos la fórmula para calcularla: $A = \frac{6la}{2}$

Falta conocer la longitud del apotema a. ¿Cuánto mide el ángulo indicado en el triángulo rectángulo AMO?



Justifica los pasos que se siguen para calcular el valor de a:

$$\tan 30° = \frac{6.5}{a}$$

$$a = \frac{6.5}{\tan 30°}$$

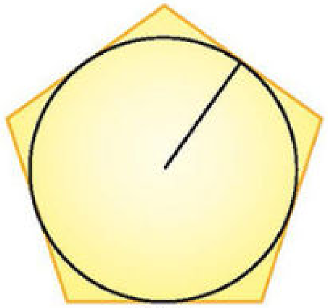
$$a = \frac{6.5}{0.5774} = 11.258 \text{ cm}$$

Ahora, puedes calcular el área del hexágono regular.

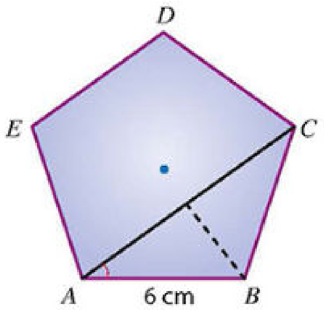
Bloque **CUATRO**

Analicen y resuelvan los siguientes problemas.

1. ¿Cuál es el radio de la circunferencia inscrita en un pentágono cuyos lados miden l = 10 cm?



2. ¿Cómo se puede calcular la longitud de una diagonal de un pentágono regular en el que la longitud de los lados es l = 6 cm?



- Primero calculen la longitud del radio
- Después, justifiquen cada uno de los pasos

$$sen\ 36° = \frac{3}{r}$$

$$r = \frac{3}{sen\ 36°}$$

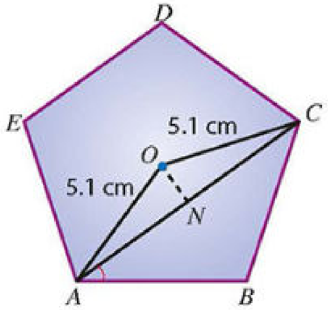
$$r = \frac{3}{0.5878} = 5.1 \text{ cm}$$

- Se forma el triángulo isósceles $\measuredangle OAC$ y se calcula $\overline{AN}$

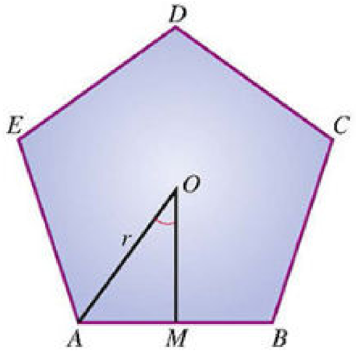
$$sen\ 72° = \frac{\overline{AN}}{5.1}$$

$$0.9510 = \frac{\overline{AN}}{5.1}$$

$$\overline{AN} = (0.9510)(5.1) = 4.85$$



- Finalmente se obtiene $\overline{AC} = 2(\overline{AN}) = 2 \times 4.85 = 9.7$

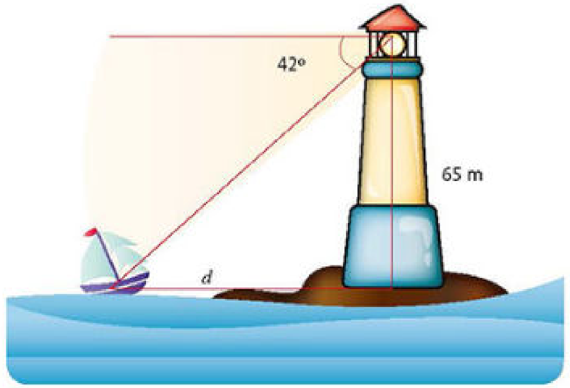


Analicen la figura de la izquierda y planteen un procedimiento más corto para resolver el problema.

EVALUACIÓN FORMATIVA

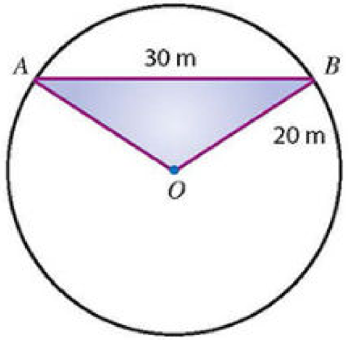
Para que conozcas tus avances en la solución de problemas con triángulos rectángulos, realiza las siguientes actividades.

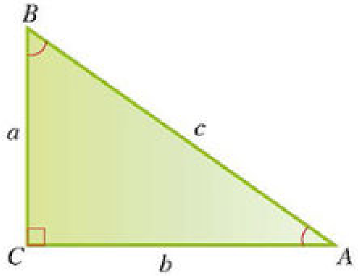
1. Calcula la distancia d entre una lancha y un faro, sabiendo que la altura del faro es de 65 m y que la lancha se observa desde lo alto del faro con un ángulo de depresión de 42°.



2. ¿Qué altura h ha alcanzado un avión que despegó con un ángulo de elevación de 16°, si ha recorrido una distancia de 25 km?

3. En una circunferencia de 20 m de radio se trazó una cuerda de 30 m de longitud. Calcula la magnitud del ángulo central $\measuredangle AOB$ determinado por los extremos A y B de la cuerda.





4. Usando la figura del triángulo rectángulo, completa la siguiente tabla.

A	B	a	b	c	$sen\ A$	$cos\ A$	$tan\ B$
		8	9				
		5		8			
46°				12			
	50°		10				

Habilidades digitales

Realiza una búsqueda en internet sobre el uso de las razones seno, coseno y tangente de un ángulo. Puedes iniciar consultando la siguiente dirección electrónica:
http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/trigono.htm
(Consulta: 12 de enero de 2015).
Escribe un resumen de la información que consultes y preséntalo a tu profesor.

Bloque CUATRO

Proporcionalidad y funciones

Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa

ACTIVIDADES INICIALES

Velocidad y aceleración

Tiempo (s)	5	16	20
Velocidad (m/s)	25	69	x

¿Recuerdas lo que es el movimiento uniformemente acelerado de tu clase de física? A continuación usarás algunos de esos conceptos para esta actividad. Verónica, Anselmo y Margarita recuerdan y analizan un problema de física, cuyo enunciado es el siguiente: un objeto en movimiento uniformemente acelerado se mueve con una velocidad de 25 m/s después de 5 s de aplicada la aceleración, mientras que en el tiempo $t = 16$ s su velocidad es de 69 m/s. ¿Cuál será la velocidad del móvil en el instante $t = 20$ s?

Verónica aplicó sus conocimientos sobre proporcionalidad y obtuvo el siguiente resultado:

$$\frac{25}{5} = \frac{x}{20} \qquad x = 100$$

Verónica dice que la velocidad a los 20 s será de 100 m/s.

Anselmo también usó una proporción, pero obtuvo un resultado diferente.

$$\frac{69}{16} = \frac{x}{20} \qquad x = 86.25$$

Él encontró que la velocidad a los 20 s será de 86.25 m/s.

Margarita analizó las razones que se obtienen al comparar la velocidad y el tiempo:

$$\frac{25}{5} \text{ y } \frac{69}{16}$$

Analicen la situación anterior y realicen las actividades que se incluyen a continuación.

1. ¿Cuál sería su conclusión acerca de las respuestas obtenidas por Anselmo y Verónica?
2. Tracen una gráfica para resolver el problema anterior.
3. Apliquen la siguiente razón para resolver el problema planteado por Anselmo, Verónica y Margarita.

$$\frac{\text{Variación de la velocidad}}{\text{Variación del tiempo}} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

Revisen sus resultados y preséntenlos al profesor para que los valide.

CONSTRUYO MIS CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES

¿Cómo se calcula una razón de cambio?

Arturo pagó $1 800.00 por una mudanza en la que se recorrió una distancia de 80 km, mientras que a Estela le cobraron $3 200.00 por un recorrido de 150 km. ¿Cuánto se pagará por una mudanza, si el recorrido será de 200 km? ¿Cuál es la variación en el precio de la mudanza? ¿Cuál es la variación de los recorridos?

Expliquen las siguientes expresiones y calculen la razón de cambio para el problema planteado.

$$\text{Razón de cambio} = \frac{\text{Variación de } y}{\text{Variación de } x}$$

$$\text{Razón de cambio} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

¿Cuál es el significado del valor calculado para la **razón de cambio** anterior?

Glosario

razón de cambio. Es un cociente que compara la variación de una variable dependiente con respecto a la variable independiente.

Aplica la misma razón de cambio para resolver el problema.

Realicen las siguientes actividades.

1. Apliquen el concepto de razón de cambio para resolver el problema planteado en la página anterior por Verónica, Anselmo y Margarita.

   a) Calculen la variación de la velocidad
   Variación de la velocidad = $v_2 - v_1$

   b) ¿Cómo se determinaría la variación del tiempo?
   Variación del tiempo = $t_2 - t_1$

   c) Establezcan la razón de cambio entre la velocidad y el tiempo

   $$\text{Razón de cambio} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

   d) ¿Cuál es el significado de la razón de cambio?

   e) ¿Cuál será la velocidad del móvil en el instante $t = 20$ s?

2. Usen un sistema de coordenadas cartesianas para representar el resultado y los datos del problema anterior.

Aplico

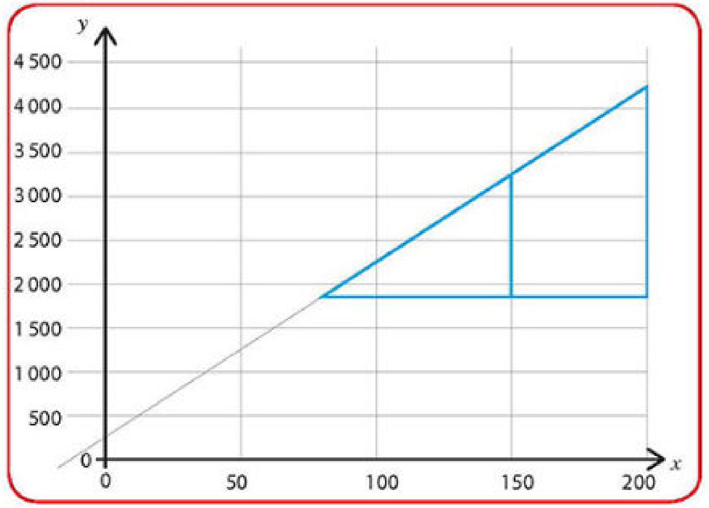
Propón una expresión algebraica de la forma $v = v_0 + at$ que sirva de modelo para la situación de la razón de cambio analizada.

Comunico

Realiza una investigación sobre las velocidades que alcanzan los automóviles eléctricos y redacta un escrito en el que reflexiones en torno a cómo pueden contribuir éstos al mejoramiento del ambiente.

¿Cuál es la relación entre la razón de cambio y la pendiente de la recta que modela un proceso o fenómeno?

Los datos del problema de las mudanzas planteado en la página anterior se pueden usar para hacer una representación gráfica del problema.



Analiza y justifica cada una de las siguientes expresiones y/o afirmaciones.

a) $r = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

b) $r = \dfrac{3\,200 - 1\,800}{150 - 80}$

c) La razón r es la pendiente m de la recta.

d) Si usamos las coordenadas del punto (0, b), se puede usar la razón de cambio para calcular el valor de b.

$$r = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \begin{aligned} (x_2, y_2) &= (80, 1800) \\ r &= \frac{1800 - b}{80 - 0} \\ 1600 &= 1800 - b \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (x_1, y_1) &= (0, b) \\ 20 &= \frac{1800 - b}{80} \\ b &= 200 \end{aligned}$$

La expresión algebraica de la recta que modela el problema de los precios de las mudanzas es una función lineal.

$$y = mx + b \qquad y = 20x + 200$$

Pienso

Revisen y expliquen el procedimiento anterior y verifiquen que las coordenadas x y y de los puntos involucrados cumplan con la expresión $y = 20x + 200$.

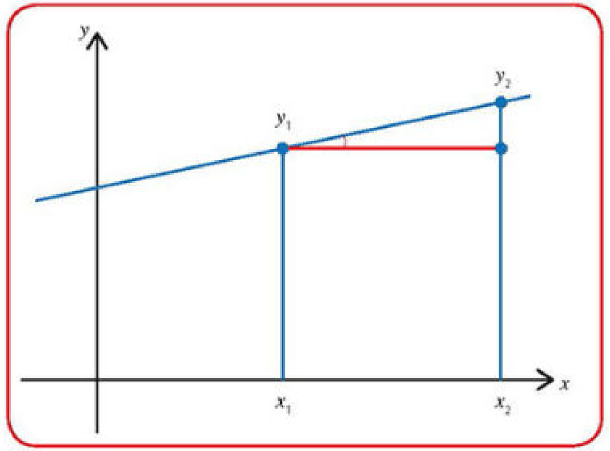
Toma en cuenta los conceptos de razón de cambio y pendiente de una recta para que resuelvas lo que se solicita a continuación.

1. Rodrigo recibió un pago mensual de \$2 900.00 por la venta de 7 refrigeradores y Sara recibió \$3 800.00 en el mes en el que vendió 10 refrigeradores. ¿Cuál es el salario base de Rodrigo?, ¿cuál es el de Sara?

2. Calcula la razón de cambio para los valores $x_1 = 10$, $x_2 = 18$ de las variables x, y relacionadas mediante la expresión $y = -4x + 11$.

3. A partir de la figura, justifica la igualdad entre la pendiente de la recta y la razón de cambio entre las variables x, y.

$$y = mx + b$$
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



4. Redacta un escrito en el que expliques lo que sucede en los siguientes casos:
   a) $x_1 < x_2, \quad y_2 > y_1$
   b) $x_1 < x_2, \quad y_2 < y_1$

Habilidades digitales

Para que conozcas algunas aplicaciones de las razones de cambio te sugerimos consultar la siguiente página electrónica:
http://www.secundariaenred.com.mx/b1/mt31-7.pdf
(Consulta: 25 de septiembre de 2014).
Resuelve algunos de los problemas planteados en la página anterior y presenta tus resultados al profesor.

Bloque CUATRO

Análisis y representación de datos

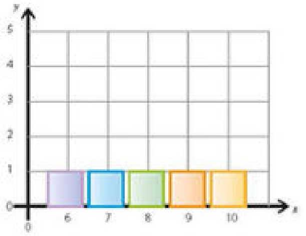
Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión

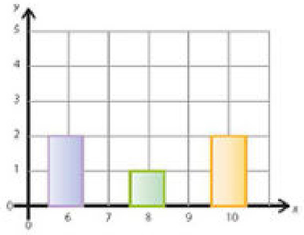
ACTIVIDADES INICIALES

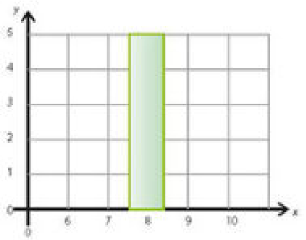
Datos juntos o datos separados

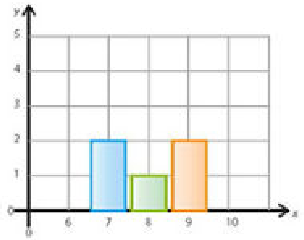
Mario, Yolanda, Zafira y Zenón realizan un estudio sobre la necesidad de calcular otras medidas diferentes a las de tendencia central para que puedan describir de una mejor manera lo que sucede en algunas situaciones de la vida real.

Ellos han presentado gráficamente resultados de exámenes parciales de Matemáticas. Calcularon la media aritmética en cada caso y se dieron cuenta de que el valor es el mismo. Sin embargo, las gráficas, que puedes ver a continuación, muestran diferencias entre los resultados. En algunos casos los datos se encuentran muy separados entre sí y a veces están muy concentrados. ¿Cómo se puede medir esta dispersión de los datos?









Glosario

dispersión. Grado o tamaño del distanciamiento entre los datos de una colección.

Calculen el rango para cada colección de datos y después de comparar sus resultados, escriban una conclusión al respecto.

Discutan acerca de cómo se puede medir la **dispersión** con base en la media aritmética.

Presenten sus resultados al profesor y solicítenle que organice un debate grupal para que presenten sus propuestas.

CONSTRUYO MIS CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES

¿Cómo se calcula la desviación media?

Glosario

desviación media. Es el promedio de las distancias entre cada uno de los datos y la media.

rango. Amplitud de la variación de un fenómeno entre un límite o dato menor y uno mayor claramente especificados.

Julia y Marco conocen dos procedimientos para medir la dispersión de un conjunto de datos: el **rango** y la **desviación media** (*D.M.*).

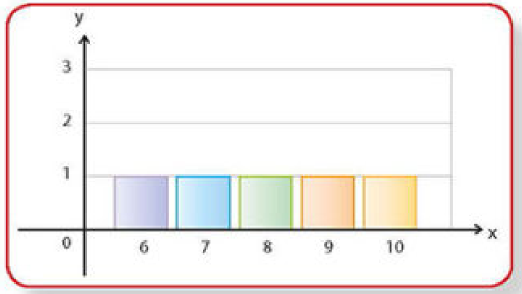
Julia ha obtenido las calificaciones: 9, 6, 10, 8 y 7.

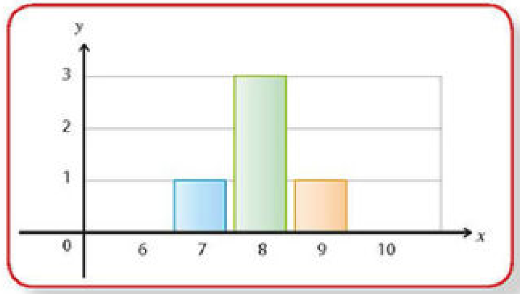
Las calificaciones de Marco son: 8, 8, 9, 7 y 8.

La siguiente tabla muestra la semejanza entre las calificaciones de Julia y Marco.

Julia	Marco
$\bar{x} = 8.0$	$\bar{x} = 8.0$

Las siguientes gráficas muestran las diferencias entre las calificaciones de Marco y las de Julia.





Comunico

¿Cómo se puede medir la dispersión de los datos?
Haz un escrito referente a esta interrogante y preséntalo al profesor.

Expliquen y completen la tabla para calcular la desviación media de una colección de datos.

Generalizo

Describe y explica la fórmula que se puede usar para calcular la desviación media:

$$D.M. = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$$

x_i	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$
6	$6 - 8 = -2$	2
7	$7 - 8 = -1$	
8	$8 - 8 = 0$	0
9	$9 - 8 = 1$	1
10	$10 - 8 = 2$	
	$\sum \lvert x_i - \bar{x}\rvert = 6$	

1. Calculen la *D.M.* para las calificaciones de Marco y de Julia, después compárenlas y describan las diferencias entre los dos conjuntos de calificaciones.
2. Calculen el rango para las calificaciones de Marco y Julia y aplíquenlo para describir las diferencias. Pueden usar la fórmula $r = l_M - l_m$ en la que r significa rango, l_M el límite o dato mayor y l_m es el límite o dato menor.

Bloque CUATRO

¿Cómo se calcula la desviación media para una colección de datos agrupados?

Analicen y completen el procedimiento para calcular la desviación media de una colección de datos agrupados.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i m_i}{\Sigma f_i} \qquad D.M. = \frac{\Sigma f_i \mid m_i - \bar{x} \mid}{\Sigma f_i}$$

Intervalo	Marca de clase	Frecuencias	$f_i \times m_i$	$\mid m_i - \bar{x} \mid$	$f_i \mid m_i - \bar{x} \mid$
100-106	103	9	927		
93-99	96	12			
96-92	89	15			
79-85	82	20			
72-78	75	11			
65-71	68	7			
		Σf_i	$\Sigma f_i m_i =$		$\Sigma f_i \mid m_i - \bar{x} \mid =$

Organicen una presentación grupal para analizar sus respuestas.

Aplica tus conocimientos sobre la dispersión media de una colección de datos para realizar la siguiente actividad.

1. Calcula el rango y la desviación media de la siguiente colección de datos obtenidos al investigar sobre las edades de los padres de un grupo de alumnos.

Edades de los padres de un grupo de alumnos									
35	60	38	36	37	39	40	45	49	53
46	47	43	51	48	32	42	57	51	42
52	36	38	40	36	44	52	37	45	47

Realicen un estudio estadístico para conocer las edades de las madres de todos los alumnos de su grupo. Presenten sus resultados y analícenlos aplicando medidas estadísticas como la media, el rango y la desviación media.

EVALUACIÓN FORMATIVA

Aplica tus conocimientos y habilidades sobre el rango y la desviación media para que realices las siguientes actividades.

1. Calcula el rango y la desviación media de la colección de datos e indica las diferencias entre dichas medidas de dispersión.

Colección de datos								
5	8	10	12	22	34	43	55	67
11	95	82	83	71	67	52	42	28

2. Aplica la media, el rango y la desviación media para comparar los salarios en dos empresas. Escribe una conclusión para cada caso.

Empresa A
$\bar{x}$ = \$10 000.00
rango = \$12 000.00
D.M. = \$2 000.00

Empresa B
$\bar{x}$ = \$10 000.00
rango = \$8 000.00
D.M. = \$1 000.00

3. Escribe una colección de datos en la que la medida de la dispersión de éstos arroje el mismo resultado, sin importar si se usa el rango o la desviación media.

Comunico

Explica en un escrito las diferencias entre usar el rango y la desviación media para describir la dispersión en una colección de datos. Presenta tu trabajo al profesor para que lo valide.

Habilidades digitales

Para que conozcas más acerca de las medidas de dispersión, realiza una búsqueda en internet. Puedes comenzar en la siguiente dirección electrónica:
http://www.educarchile.cl/ech/pro/app/detalle?id=209007
(Consulta: 16 de enero de 2015)
Elabora un resumen de la información que consultes y preséntalo al profesor.

Evaluación final

Analiza cada uno de los planteamientos para que respondas lo que se solicita.

1. Escribe la expresión algebraica que defina el enésimo término de la sucesión.

   La suma de los primeros n números pares $2 + 4 + 6 + 8 + ... + 2n$

n	1	2	3	4	n
a_n	2	6	12		

2. Arnulfo y Hortensia hicieron un estudio estadístico sobre la edad de dos grupos de personas y obtuvieron los datos que se consignan en las siguientes tablas.

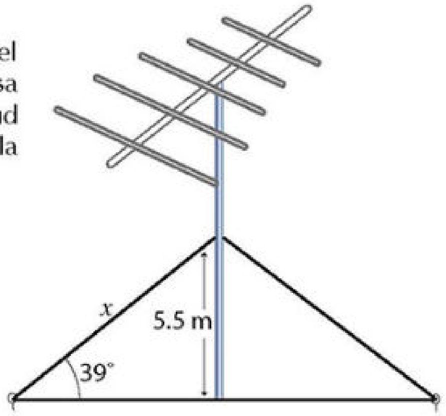
A	25	23	18	15	14	20	24	19	17	15
	14	16	18	20	22	21	19	17	15	21

H	20	22	22	20	23	24	14	16	18	17
	15	15	19	19	1	17	19	20	21	25

Calcula los valores del rango y desviación media para cada colección de datos.

Compara los valores de los rangos y las desviaciones medias; después escribe una conclusión sobre las semejanzas y diferencias obtenidas.

3. Una antena se sujeta con alambres que van del techo de una casa a un punto de la antena. Usa los datos de la figura para calcular la longitud de cada uno de los alambres que sujetan a la antena.



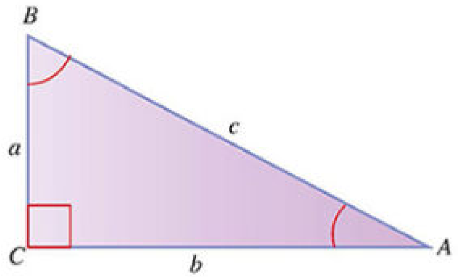
4. El papá de Zenaida es topógrafo. Le plantea el siguiente problema.

¿Cuál es la longitud de la altura $\overline{PQ}$ del acantilado representado en la figura?

Elabora una estrategia para llegar a la solución. Aplícala, obtén la solución y comprueba el resultado obtenido.

5. Usa los datos del triángulo para justificar las siguientes igualdades.

a) $tan\ A = \dfrac{sen\ A}{cos\ B}$ b) $sen\ B = cos\ A$ c) $cos\ B = sen\ A$ d) $sen^2\ A + cos^2\ A = 1$



Usa este código para completar tus conocimientos sobre las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

Marca el círculo que contenga la respuesta correcta en la cuestión. En tu cuaderno escribe los razonamientos y procedimientos que hayas seguido para obtener dicha respuesta.

1. Es una medida de dispersión.

   ○ Desviación ○ Sesgo ○ Desviación media ○ Media

2. Base para calcular la desviación media de una colección de datos.

   ○ Mediana ○ Moda ○ Rango ○ Media

3. Cociente entre las variaciones de dos variables.

   ○ Razón ○ Razón de cambio ○ Variación ○ Desviación

4. Se obtiene dividiendo el cateto opuesto entre el cateto adyacente.

   ○ Seno ○ Coseno ○ Ángulo ○ Tangente

5. Es el resultado de dividir el cateto adyacente entre la hipotenusa.

   ○ Seno ○ Coseno ○ Tangente ○ Ángulo

6. La razón de cambio es igual a la pendiente de la recta…

   ○ A veces ○ Nunca ○ Casi siempre ○ Siempre

7. Es el sólido que se genera con la rotación de un semicírculo.

   ○ Esfera ○ Cono ○ Cilindro ○ Cubo

8. Transformación geométrica que sirve para generar conos, cilindros y esferas.

   ○ Reflexión ○ Traslación ○ Simetría ○ Rotación

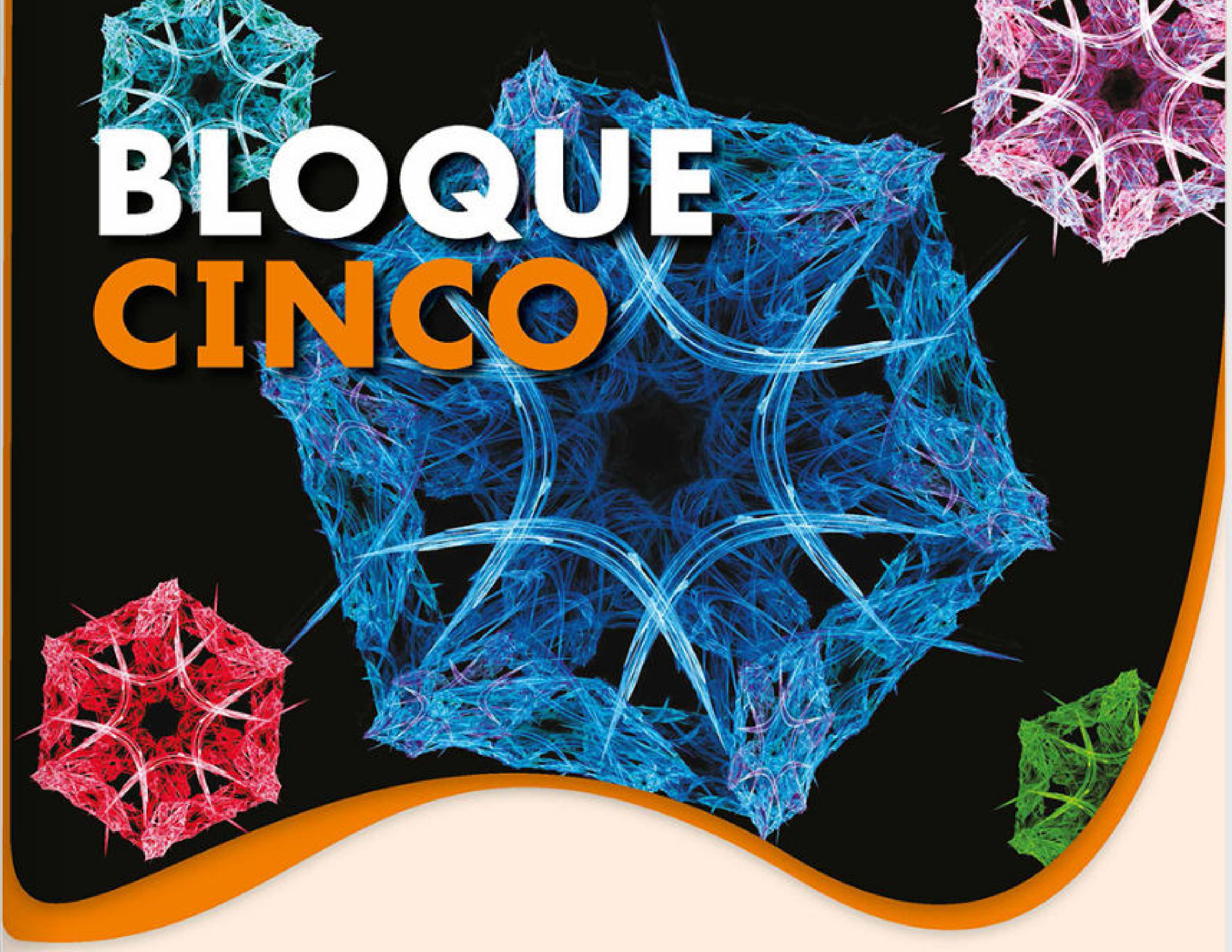
9. Es el enésimo término de la sucesión 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50,…

   ○ n^2 ○ $n^2 - 1$ ○ $n + 1$ ○ $n^2 + 1$

10. Es la pendiente de la recta $y = -6 - 10x$.

   ○ -6 ○ $-10x$ ○ -10 ○ y

BLOQUE CINCO



Ejes temáticos

- Sentido numérico y pensamiento algebraico
- Forma, espacio y medida
- Manejo de la información

Fractal Raster. Diseño de fractal realizado en computadora que muestra la simetría hexagonal formada con trazos rectos y cóncavos a diferentes escalas.

Aprendizajes esperados

- Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.
- Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.
- Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Competencias

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas eficientemente

Bloque CINCO

Patrones y ecuaciones

Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada

ACTIVIDADES INICIALES

La vida de Diofanto

Diofanto de Alejandría fue un matemático notable de la antigüedad y su epitafio consistía en un ejercicio matemático con los datos de su vida.

"¡Caminante! Aquí fueron sepultados los restos de Diofanto. Y los números pueden mostrar, ¡oh, milagro! Cuan larga fue su vida, cuya sexta parte constituyó su hermosa infancia. Había transcurrido además una duodécima parte de su vida, cuando de vello cubrióse su barbilla. Y la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril. Pasó un quinquenio más, y le hizo dichoso el nacimiento de su precioso primogénito, que entregó su cuerpo, su hermosa existencia que duró tan sólo la mitad de la de su padre en la Tierra. Y con la profunda pena descendió a la sepultura habiendo sobrevivido cuatro años al deceso de su hijo. Dime cuántos años había vivido Diofanto cuando le llegó la muerte."

Analicen y resuelvan el problema planteado en el epitafio de Diofanto; para ello, realicen los pasos que se describen a continuación.

1. Lean el planteamiento del problema
2. Clasifiquen los datos conocidos y establezcan la incógnita
3. Modelen el problema mediante una ecuación algebraica
4. Resuelvan dicha ecuación
5. Comprueben la raíz o solución de la ecuación
6. Detallen la solución del problema y hagan la comprobación correspondiente
7. En este caso, se puede verificar también el tiempo que duró cada etapa de la vida de Diofanto:
   a) ¿De cuántos años fue su infancia?
   b) ¿A qué edad le salió la barba?
   c) ¿Cuántos años vivió su primogénito?

Soliciten al profesor que validen sus respuestas.

CONSTRUYO MIS CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES

La importancia de verificar la solución del problema

Verónica y Osvaldo resolvieron el problema que se describe a continuación, y quisieron comprobar si lo habían hecho de manera correcta.

Un automovilista recorrió la distancia entre dos ciudades, A y B, de ida a una velocidad de 120 km/h, mientras que el recorrido de regreso lo realizó a 80 km/h.

¿Cuál fue la **velocidad media** de su recorrido total?

Glosario

velocidad media. Es la razón entre la distancia que recorre un objeto y el tiempo del recorrido.

Verónica aplicó la fórmula:

$$V_m = \frac{V_1 + V_2}{2} \qquad V_m = \frac{120 + 80}{2} \qquad V_m = 100$$

La velocidad media fue de 100 km/h.

Considera que la distancia entre A y B es de 240 km, ¿cuánto tiempo se tardó el automovilista de ida y cuánto tiempo de regreso?

Usen la fórmula de la velocidad $v = \frac{d}{t}$ para obtener una ecuación que modele de manera adecuada el problema planteado.

1. ¿Cuál es el significado de la expresión $\frac{2d}{v}$, si se supone que d es la distancia entre A y B?
2. ¿Qué se obtiene de las expresiones $\frac{d}{120 \text{ km/h}}$ y $\frac{d}{80 \text{ km/h}}$?
3. ¿Cómo se puede justificar la igualdad $\frac{2d}{x} = \frac{d}{120} + \frac{d}{80}$?
4. ¿Cuál es la raíz o solución de la ecuación anterior?
5. ¿Cuál es la solución del problema planteado?

Pienso

¿Cómo se podría verificar que los resultados obtenidos en el problema anterior sean correctos?
Realiza la comprobación correspondiente.

Analicen cada uno de los siguientes casos y respondan lo que se solicita.

1. La base de un rectángulo mide 10 m más que su altura. Si el perímetro del rectángulo es de 65 m, ¿cuánto miden su base y su altura?
2. Planteen un problema cuya ecuación sea:

$$2x - 6.5 = 14.253$$

Enrique y Esmeralda analizaron lo que sucede con las dos raíces de una ecuación cuadrática en el contexto de una situación que se pretende resolver.

Glosario

móvil. Es un objeto que se encuentra en movimiento.

Subidos en la azotea de su casa, la cual tiene una altura de 5 m, lanzaron un **móvil** hacia arriba con una velocidad inicial de 30 m/s. Y se preguntaron en qué tiempo estaría a una altura de 30 m respecto al suelo. Después de analizar el planteamiento del problema consideraron necesario recordar la fórmula para el lanzamiento vertical:

$$h = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Completa el procedimiento para obtener un valor aproximado del tiempo t, estableciendo la aceleración de la gravedad $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$:

$$30 = 5 + 30t - \frac{1}{2}(10)t^2$$

$$5t^2 - 30t + \qquad = 0$$

$$t^2 - 6t + \qquad = 0$$

$$t_1 = 1 \qquad t_2 = 5$$

Verifica si las raíces que siguen son las de la ecuación anterior:

$$t = 1.24 \qquad t = 7.24$$

Analicen y expliquen si las raíces representan soluciones para el problema planteado.

Analicen cada caso y realicen lo que se solicita.

1. Dos números impares consecutivos tienen la propiedad de que sus cuadrados son iguales. ¿De cuáles números se trata?
2. Escriban el enunciado de un problema que se modele y resuelva con la siguiente ecuación:

$$3x^2 - 12x + 3 = 0$$

Lean la *Cacería mitológica* a fin de comprender el problema planteado y realicen lo que se solicita enseguida.

Cacería mitológica

Aunque es breve la vida del conejo
y un lustro hace dos siglos en su historia,
habrá por lustros conejil memoria
de lo ocurrido en el molino viejo,
cuando como dirá doña Coneja,
bajó Diana a cazar en Fuente Vieja.

En pámpanos se escriban,
si no en bronces,
con plumas de perdiz, si no buriles,
los nombres de las muchas
que entre miles
dieron su vida por la Diva entonces,

plumadas y pilosas bestezuelas
blanco a sus tiros, blandas a sus muelas.

Ciento y veinte cabezas daba el cupo
de las piezas al cabo recogidas,
y de patas por siempre quietecidas
contó trescientos quien contarlas supo;
pues que Mercurio terminado el día,
en contar y contar se entretenía.

De cuántos picos acalló la muerte,
ni de cuantas orejas sordecieran,
números no diré, que ociosos fueran
tras lo que dijo ya mi canto fuerte;
que Minerva en la escuela dio manera
de que los pueda calcular cualquiera.

Tomado de: Rafael Rodríguez, *Enjambre matemático: problemas curiosos, juegos, anécdotas y comentarios.*

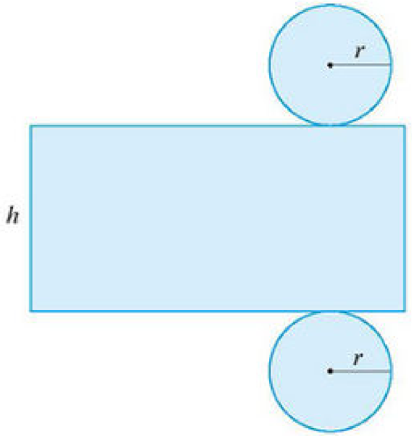
1. Elaboren un modelo algebraico
2. Calculen las raíces o soluciones
3. Describan la solución del problema planteado
4. Verifiquen que hayan obtenido la respuesta correcta

Formula un problema asociado al siguiente sistema de ecuaciones:

$$x + y = 500,$$
$$2x - y = 100.$$

Completen lo que falta en cada caso para resolver los problemas y comprueben sus respuestas.

1. ¿Cuál es la superficie total de lámina que se requiere para construir un cilindro con un volumen de 1000 cm³, si éste debe tener una altura de 20 cm?



Pueden sustituir los datos conocidos en la fórmula para calcular el volumen de un cilindro:

$$V = \pi r^2 h$$

$$(\qquad) = \pi r^2 (\qquad)$$

Para que conozcan la importancia de verificar las respuestas, estudien el tema "Comprueba soluciones" en el libro *Apuntes de matemáticas* de Carmen Burgués, Roser Codina y Manuel Montanuy. El cual pueden encontrar en su Biblioteca de Aula o Escolar (Libros del Rincón).

Al resolver la ecuación cuadrática se obtienen las raíces:

$r_1 =$ ______________ $r_2 =$ ______________

Usa la siguiente fórmula para resolver el problema.

$$A_T = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

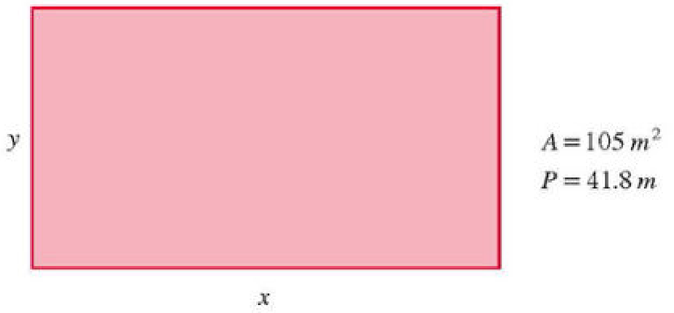
Justifico

¿También se puede usar esta fórmula para resolver el problema anterior? Justifica tu respuesta.

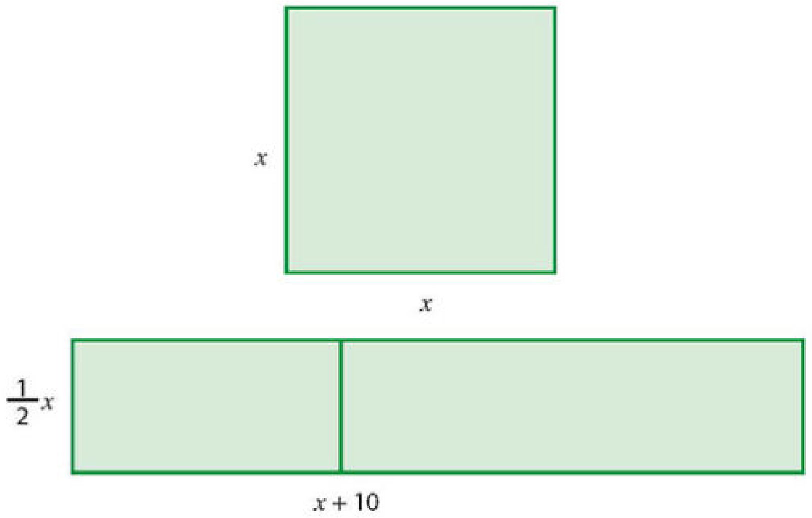
$$A_T = 2\pi r(r + h)$$

Analiza las siguientes situaciones y utiliza ecuaciones algebraicas para resolverlas.

1. ¿Cuánto miden los lados de un rectángulo con un perímetro de 41.8 m y un área de 105 m²?



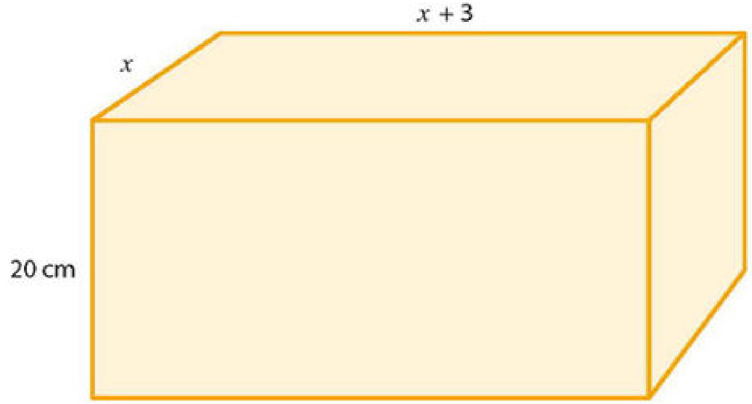
2. Si uno de los lados del cuadrado se divide entre 2 y al otro lado se le aumentan 10 cm, se obtiene un rectángulo con un perímetro de 56 cm. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?



Analicen las siguientes situaciones y utilicen ecuaciones algebraicas para resolverlas.

1. Un cordel de 72 m se divide en dos partes de tal modo que la longitud de una parte equivale a cuatro quintas partes de la longitud de la otra. Calculen la longitud de los fragmentos.
2. Cuatro libros y dos cuadernos cuestan \$480.00 mientras que dos libros y siete cuadernos valen \$380.00. ¿Cuál es el precio de un libro?, ¿y el de un cuaderno?
3. Encuentren cuatro números consecutivos cuya suma sea -472.
4. Calculen dos números cuya suma es 255 y su diferencia es 25.
5. Rubí compró la leche para la cooperativa, y pagó \$356.00 por 20 envases con producto, de dos distintos tamaños, los de 2 litros le costaron \$21.00 cada uno, mientras que los de un litro \$13.00 cada uno. ¿Cuántos envases con leche de cada tamaño compró Rubí?
6. Si la suma de un número x y su recíproco $\frac{1}{x}$ es igual a $1\frac{4}{63}$, ¿de qué número se trata?
7. Planteen un problema que se resuelva con la figura y la ecuación que se presentan a continuación.

$$V = 20x^2 + 60x$$

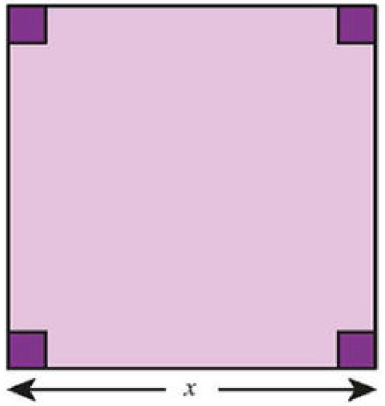


8. En un hotel de tres pisos hay 84 habitaciones. El segundo piso tiene las dos terceras partes de recámaras que tiene el primero, y el tercero la mitad de las que hay en el segundo, ¿cuántas habitaciones hay en cada piso del hotel?

Revisen sus respuestas y argumenten por qué son correctas.

Analiza los enunciados, establece un modelo algebraico y aplícalo para obtener la solución de cada caso.

1. Después de gastar $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{9}$ del dinero que tenía aún me quedan \$160.00. ¿Cuánto dinero tenía?
2. Serafín dejó la mitad de su fortuna a sus hijos, la cuarta parte a sus hermanos, la octava parte a su esposa y el resto de \$100 000.00 a una institución. ¿A cuánto ascendía su fortuna?
3. La suma de tres números enteros consecutivos impares es 3, calcula de qué números se trata, recordando que cada uno de éstos se expresa como: $2x+1,\ 2x+3,\ 2x+5$.
4. Un bote que navega por un río recorre 30 km en 3 horas a favor de la corriente y 6 km en 1 hora contra la corriente. ¿Cuál es la velocidad del río? ¿Y la del bote en aguas tranquilas?
5. El denominador de una fracción excede al numerador en 5 unidades. Si el numerador y el denominador se incrementan en una unidad, el nuevo valor de la fracción sería $\frac{4}{9}$ ¿De qué fracción se trata?
6. Con una lámina de cartón, de forma cuadrada, se construye una caja cortando en cada esquina un cuadrado de 4 cm por lado, para después doblar los rectángulos formados. ¿Cuál era la longitud de los lados del cuadrado original si se obtuvo una caja con un volumen de 576 cm^3?



Aplico

Plantea un problema que se resuelva con la siguiente ecuación cuadrática.

$$v_0t+\frac{1}{2}gt^2=200$$

Comparen sus respuestas y verifiquen si son correctas.

Lee cada enunciado, plantea las ecuaciones necesarias, resuélvelas y obtén la solución del problema planteado.

1. La distancia d de frenado de un tráiler depende de la velocidad x a la que se traslada. Algebraicamente, esta situación se expresa con la ecuación $d=0.02x^2+0.4x$. ¿A qué velocidad se movía un tráiler que se detuvo 160 m después de frenar?

Ecuaciones algebraicas	Solución de las ecuaciones	Solución del problema	Comprobación

2. El costo de extraer 4 toneladas de mineral es de \$5 600.00, y para extraer 7 toneladas se deben pagar \$8 600.00. ¿A cuánto ascenderá el costo por extraer 90 toneladas del mineral?

Ecuaciones algebraicas	Solución de las ecuaciones	Solución del problema	Comprobación

3. Algunas investigaciones cardiovasculares han determinado que el riesgo de tener un nivel de colesterol de 220 mg/dL es de 17.5% mientras que a 300 mg/dL le corresponde un 20.58%. ¿Cuál es el riesgo de llegar a un nivel de colesterol de 350 mg/dL?

Ecuaciones algebraicas	Solución de las ecuaciones	Solución del problema	Comprobación

4. El triple de la suma de dos números es igual a 90, mientras que el doble de su diferencia es igual a 12. ¿De qué números se trata?

Ecuaciones algebraicas	Solución de las ecuaciones	Solución del problema	Comprobación

Habilidades digitales

Para que conozcas más acerca de ecuaciones lineales y cuadráticas, realiza una búsqueda en internet. Puedes comenzar ingresando a la siguiente dirección electrónica:
www.montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE_TEXT_RESOURCE/U10_L2_T2_text_final_es.html
(Consulta: 12 de enero de 2015).
Selecciona tres problemas y plantea los procedimientos para resolverlos.

Medida

Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto

ACTIVIDADES INICIALES

Secciones cónicas y secciones cilíndricas

Carlos y Antonia muestran algunas de las secciones que se pueden obtener cuando se realizan cortes en cilindros y conos rectos.


Figura 1

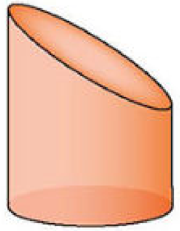


Figura 2

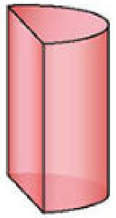


Figura 3

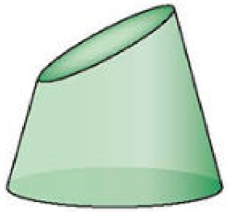


Figura 4


Figura 5

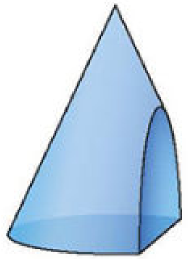


Figura 6

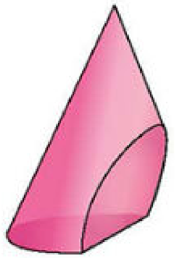


Figura 7

Analicen la forma de las secciones que presentaron Carlos y Antonia; posteriormente, en sus cuadernos, realicen lo que se solicita.

1. Para cada una de las figuras, describan:

   a) Las características del corte que se realizó
   b) La forma de las secciones presentadas

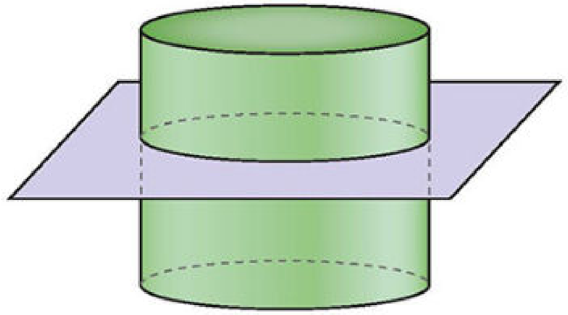
2. Escriban una definición para cada uno de los siguientes conceptos:

   a) Sección cónica
   b) Sección cilíndrica

CONSTRUYO MIS CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES

Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes en un cilindro

Alicia y sus compañeros realizaron una investigación acerca de las figuras que se pueden obtener al hacer cortes en un cilindro recto. Primero, trazaron varios cilindros y se imaginaron lo que sucedería si los cortes pasaran por algunos puntos. Después hicieron cilindros de plastilina para realizar los cortes y verificar sus conjeturas.



Alicia trazó un cilindro y se imaginó que lo cortaba de manera paralela a una de las bases. ¿Qué figura obtuvo?

Verifica tu respuesta con un cilindro de plastilina.

Fabián le ayudó a Alicia, trazó un cilindro y lo cortó con un plano perpendicular a la base. ¿Qué figura obtuvo Fabián?

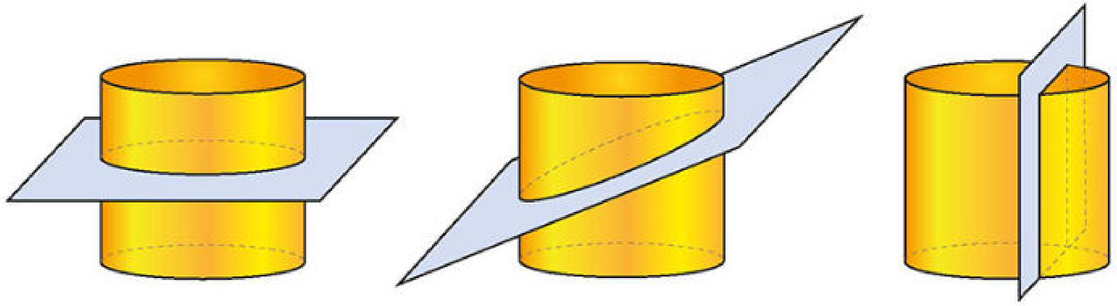
Comprueba tus respuestas empleando un cilindro de plastilina.

Para reconocer las formas obtenidas a partir de **secciones cilíndricas**, realicen lo siguiente.

1. Tracen y describan las figuras geométricas que se obtienen al hacer cortes en cilindros rectos como se observa en las siguientes imágenes.

Glosario

secciones cilíndricas. Son las figuras geométricas que se forman por la intersección de un plano y un cilindro.

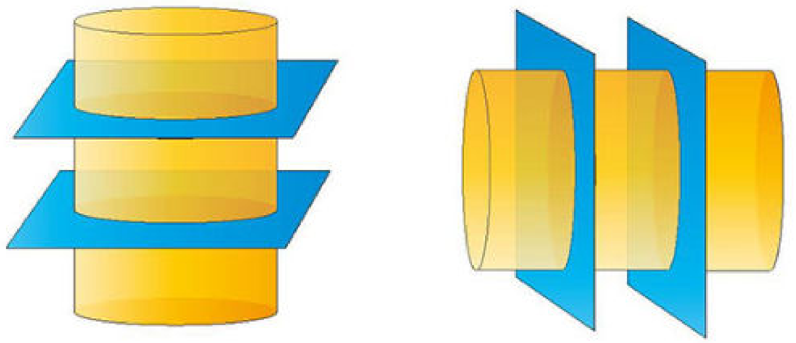


Pienso

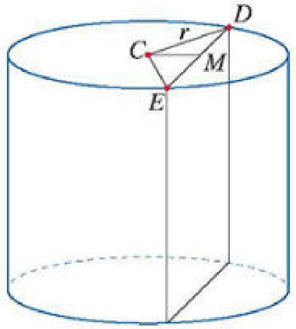
¿Cómo se debe cortar un cilindro para obtener un rectángulo que tenga la mayor área posible?

Comprendo

Si se realizan cortes paralelos a la base de un cilindro, entonces siempre se obtendrán círculos iguales a ésta. Compruébalo con cilindros de plastilina.



Observa el cilindro de la derecha. ¿Cómo se podría calcular el área del rectángulo que se obtiene mediante cortes por los puntos E y D?



$$r = 2.5\ cm$$

En el triángulo ECD trazado en el cilindro, el ángulo C mide 140°.

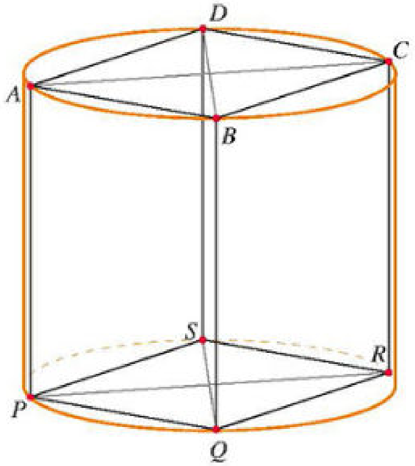
¿Cómo se puede calcular la longitud $\overline{MD}$?

¿Cuál es el valor de la longitud $\overline{ED}$?

Calcula el área del rectángulo que se obtuvo mediante cortes por los puntos E y D.

Aplico

Calcula el volumen del prisma cuadrangular.



$\overline{AC}$ = 12 cm

$\overline{RC}$ = 18.5 cm

¿Cómo son las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cono recto?

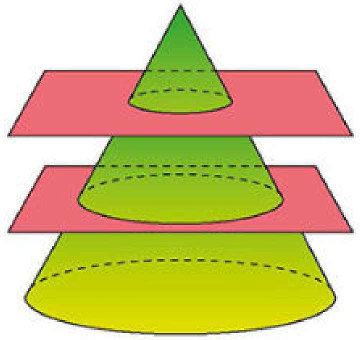
En este apartado, se abordan las características de algunas **secciones cónicas.**

Comunico

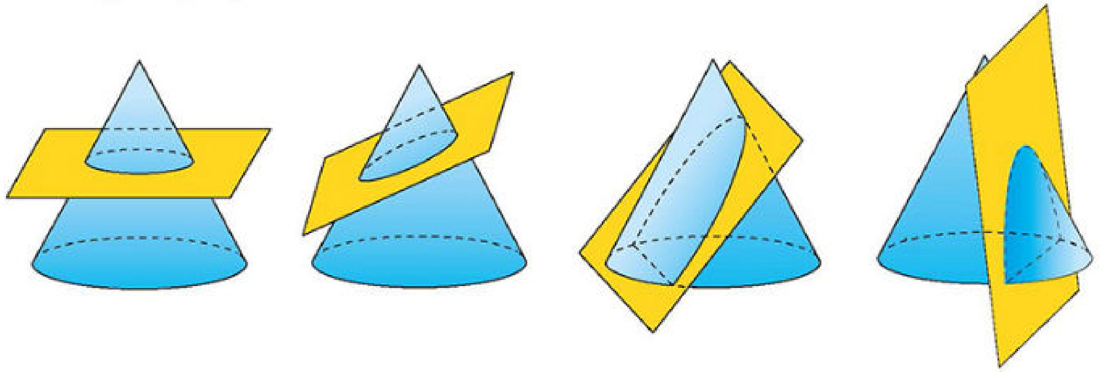
Glosario

secciones cónicas. Son las figuras geométricas que se generan mediante la intersección de un cono y un plano.

Determina qué figuras geométricas se obtienen al cortar un cono recto con planos paralelos a la base; redacta la descripción en tu cuaderno y muestra tu respuesta al profesor.



Tracen y describan las figuras geométricas que resultan al hacer cortes en conos rectos como los de las figuras que aparecen a continuación.

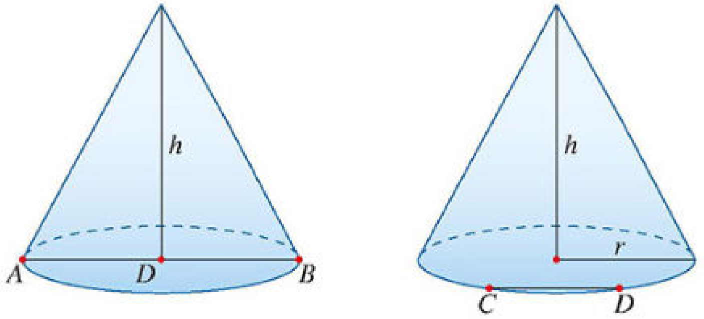


¿Cómo se debe cortar un cono recto para obtener un círculo que tenga un radio de longitud igual a un medio del radio del cono $\left(\frac{1}{2}r\right)$?

Analicen y describan los cortes que se deben hacer en un cono recto para obtener las figuras que se indican a continuación.

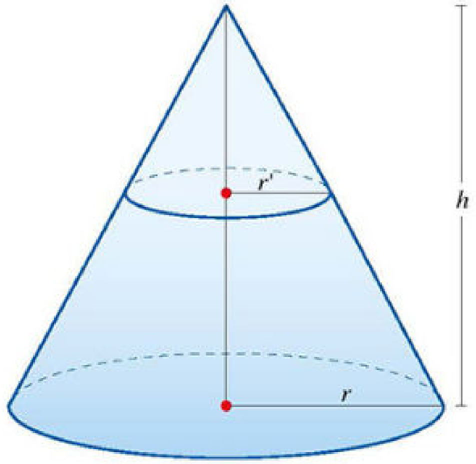
a) Triángulo isósceles con base igual a $\overline{AB}$.

b) Triángulo isósceles con base igual a $\overline{CD}$.



Radios de círculos generados al hacer cortes paralelos a la base de un cono recto

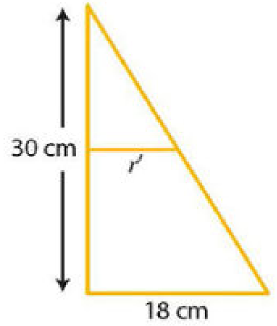
Lean y analicen cada situación; después soluciónenla.



1. ¿Cuál es la longitud del radio del círculo que se obtiene al hacer un corte paralelo a la base del cono recto en el que r = 18 cm y h = 30 cm; si el corte se hace a 13 cm de la base?

Justifiquen que la ecuación que modela la situación anterior es la siguiente.

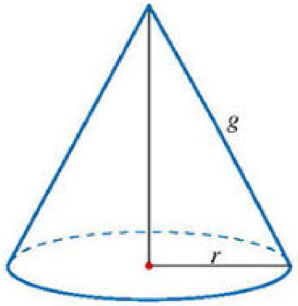
$$\frac{r'}{18} = \square$$



¿Cuál es el valor correcto para r'?

¿Cómo se puede comprobar este resultado?

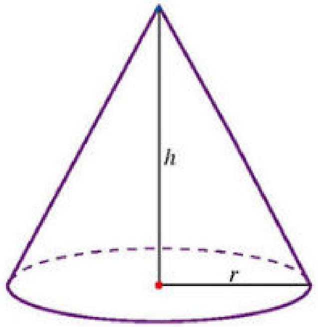
2. ¿A qué altura se deberá hacer un corte en el siguiente cono para obtener un círculo que tenga un área aproximada de 2 827 cm^2?
   a) ¿Cómo se puede calcular la altura del cono?
   b) ¿Cuál es el procedimiento para calcular el radio del círculo que se pretende obtener?
   c) ¿Cuál es la fórmula para la altura que se pide?
   d) Comprueben su resultado y compártanlo con otros compañeros.

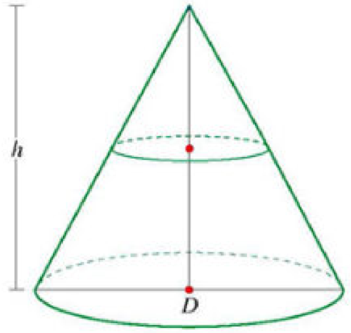


r = 50 cm
g = 95 cm

Analiza y resuelve la situación que se plantea en cada caso.

1. Describe el corte que se debe hacer en un cono recto para generar un triángulo. Calcula el área del triángulo que se obtiene como una sección cónica.





2. Calcula el área del círculo que se obtiene al hacer un corte paralelo a la base exactamente a la mitad de la altura del cono.

D = 14 cm
h = 12 cm

3. Explica cómo se obtienen las siguientes representaciones geométricas mediante la intersección de un plano con un cono:

a) Un círculo	d) Una parábola	g) Una recta
b) Una elipse	e) Un triángulo	
c) Un punto	f) Una **hipérbola**	

Glosario

hipérbola. Sección cónica que se forma con la intersección de un cono y un plano inclinado sin que éste se encuentre paralelo a la recta generatriz.

4. Escribe el procedimiento para calcular la longitud de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos a la base de un cono recto.

Habilidades digitales

Para que conozcas otros tipos de secciones cónicas y cilíndricas, realiza una búsqueda en internet; puedes comenzar ingresando a la siguiente dirección electrónica:
http://arquimedes.matem.unam.mx/lite/2013/1.1_Un100/_Un_003_IntroduccionALaGeometriaAnalitica/index.html
(Consulta: 24 de septiembre de 2014).
Observa el video y realiza las actividades que ahí se presentan. Valida tus respuestas con un compañero.

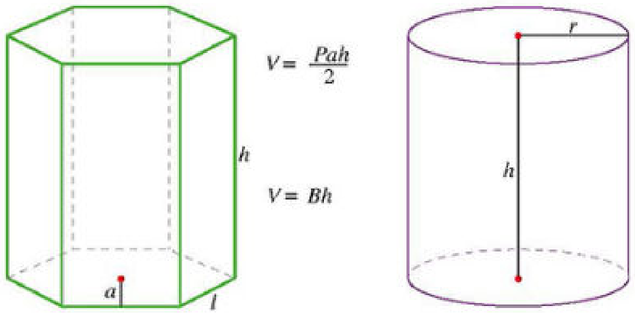
Medida

Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides

ACTIVIDADES INICIALES

Fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos

Rosaura y Benjamín compararon un prisma con un cilindro para determinar las semejanzas y diferencias que hay entre los dos sólidos geométricos.



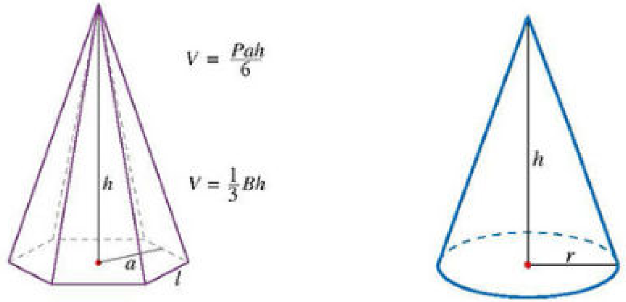
$V =$ ______

$V =$ ______

Tomen en cuenta las fórmulas para calcular el volumen de los prismas y planteen fórmulas para calcular el volumen de los cilindros.

Comparen sus fórmulas y describan el procedimiento para calcular el volumen de un cilindro cuando se conocen las longitudes del radio y la altura.

Propón una fórmula que sirva para calcular el volumen de un cono, si se conoce el radio de la base y la altura del cono.



$V=$ ______

$V=$ ______

Actividad extraclase

Con el propósito de que conozcas los procedimientos para calcular el volumen de diferentes recipientes, lee el tema "¿Cuánta agua le cabe a tu tinaco?" del libro *Geometría y el mundo* de José Antonio De la Peña. Disponible en tu Biblioteca de Aula o Escolar (Libros del Rincón).

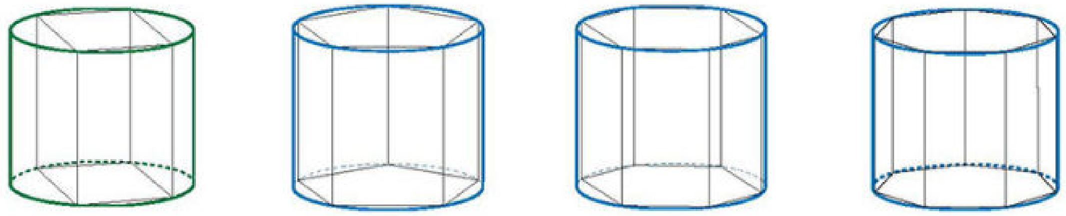
Obtengan, analicen y validen las soluciones de los problemas de cálculo del volumen de recipientes que presenta José Antonio De la Peña en su libro *Geometría y el Mundo*.

CONSTRUYO MIS CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES

¿Cómo se puede contruir una fórmula para calcular el volumen de cilindros?

Analiza y completa los siguientes procedimientos.

Procedimiento de Sonia



$V = \frac{Pah}{2}$ $V = \frac{Pah}{2}$ $V = \frac{Pah}{2}$ $V = \frac{Pah}{2}$

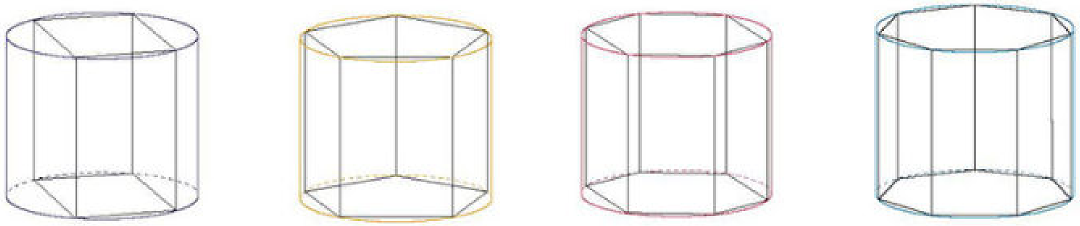
Justifica por qué al tratarse de un cilindro se pueden sustituir los valores de P y a, usando las igualdades:

$P = 2\pi r$ $a = r$

$V = \frac{(\quad)(\quad)h}{2}$ $V =$ ______

Comparen sus resultados y elaboren una conclusión.

Procedimiento de Pedro

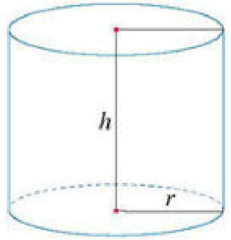


$V = Bh$ $V = Bh$ $V = Bh$ $V = Bh$

Cuando se trata de un cilindro, se puede usar la fórmula $B = \pi r^2$ para calcular el valor del área de la base B, y obtener:

$V = (\quad\quad)h$

$V =$ ______

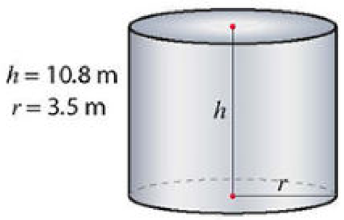


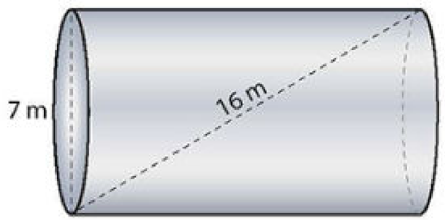
Comunico

Compara las fórmulas obtenidas mediante los procedimientos de Sonia y Pedro. En un escrito explica a tus compañeros si se trata de la misma fórmula.

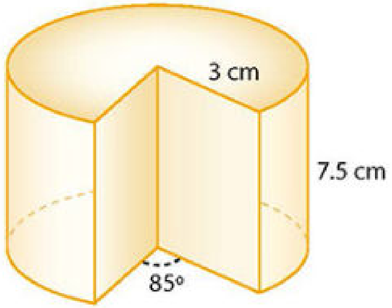
Realicen lo que se solicita a continuación.

1. Calculen el volumen de cada cilindro.

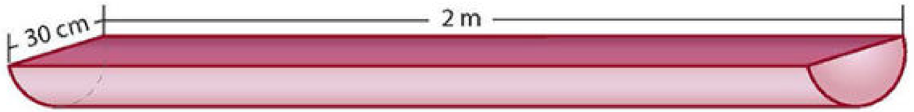




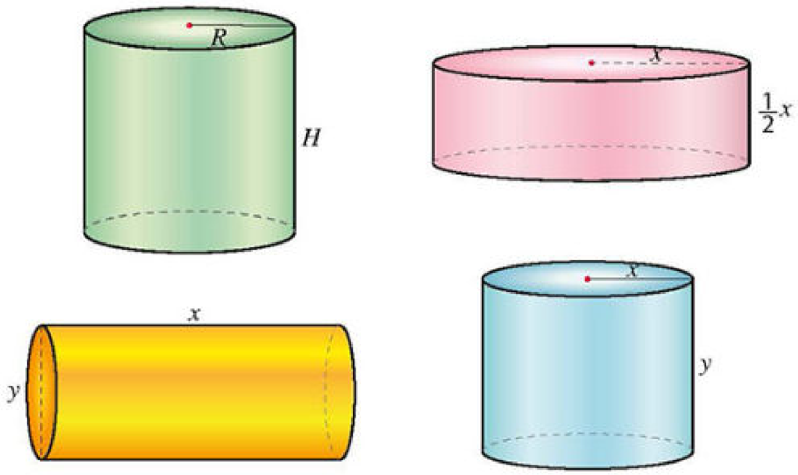
2. Determinen el volumen del segmento del cilindro recto que se muestra en la ilustración.



3. ¿Qué volumen de agua cabe en la canaleta de la figura?



4. Escriban una fórmula para calcular el volumen de cada cilindro.



5. Comparen sus resultados con los obtenidos por otros equipos.

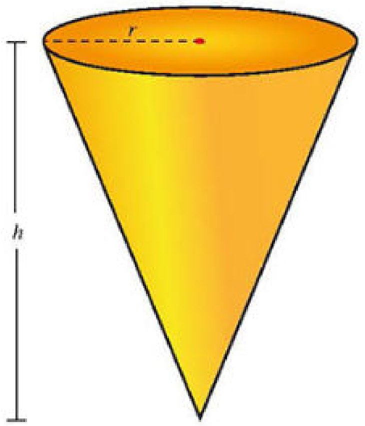
¿Cómo se puede construir la fórmula para calcular el volumen de conos rectos?

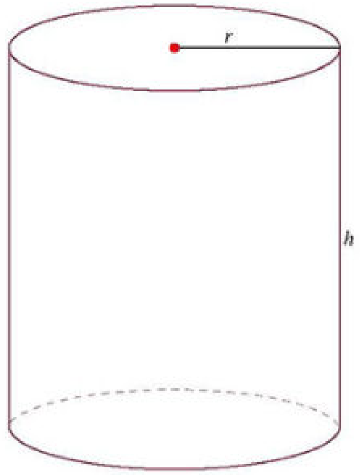
Completa las actividades que han iniciado Mayra, Leticia y Manuel, y elabora una conclusión.

Procedimiento de Mayra

Ella construye un cono y un cilindro cuyos radios y alturas tienen las mismas longitudes.

Llena el cono con azúcar y lo vacía en el cilindro para conocer la relación que hay entre el volumen de ambos cuerpos geométricos. Al conocer la relación puede deducir la fórmula para calcular el volumen del cono.





Procedimiento de Leticia

Ella recuerda la fórmula para calcular el volumen de las pirámides y la adapta para determinar el volumen de los conos.

$V = \frac{1}{3}Bh$ $\qquad$ $V = \frac{1}{3}(\quad)h$ $\qquad$ $\boxed{V = \qquad}$

Procedimiento de Manuel

Manuel usa la expresión algebraica $V = \frac{1}{3}\left(\frac{Pa}{2}\right)h$ y la aplica en el caso de conos para obtener:

$\boxed{V = \qquad}$

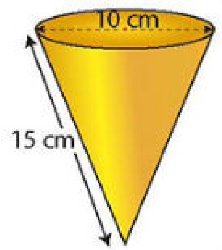
Para que participen en el desarrollo de la fórmula para calcular el volumen de los conos, realicen las actividades que se indican a continuación.

1. Completen y justifiquen los procedimientos de Mayra, Leticia y Manuel.
2. Escriban una conclusión que resuma todos los procedimientos.

Bloque CINCO

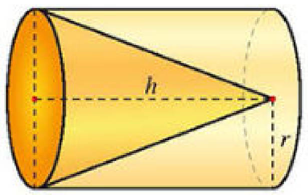
Aplico

¿Cuál es la mayor cantidad de agua que puede contener un vaso cónico como el de la figura?



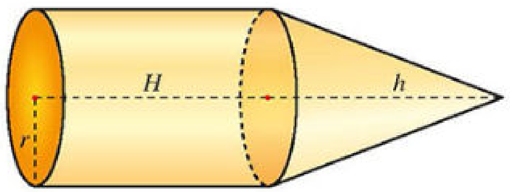
Analiza cada situación y responde lo que se solicita.

1. Si un montón de arena tiene forma cónica, ¿cuántos metros cúbicos hay de arena, si el diámetro de la base mide 5 m y la altura del cono 2.5 m?
2. De un cilindro de plastilina se extrajo un cono con la misma base y altura que las del cilindro. Escribe una fórmula para calcular el volumen del sólido formado con el resto del cilindro.



3. Calcula el volumen del sólido compuesto por un cilindro y un cono.

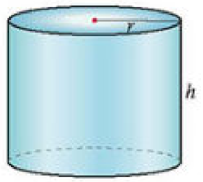
$H = 1.2$ m
$h = 1$ m
$r = 0.34$ m



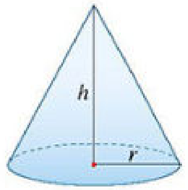
Revisen sus procedimientos y resultados.

Generalizo

Las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos son las siguientes:



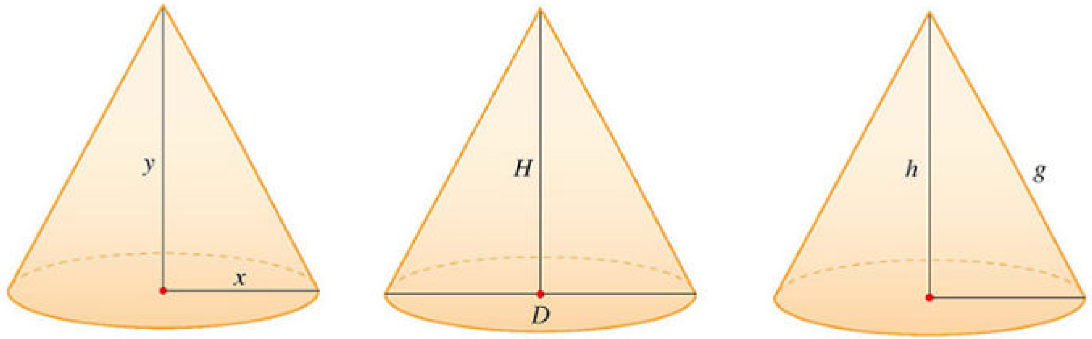
$V = \pi r^2 h$



$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Analiza el planteamiento de cada situación y realiza lo que se solicita.

1. Escribe una fórmula para calcular el volumen de cada cono.



2. Si el diámetro de un pozo cilíndrico es de 1.9 m y el nivel que alcanza el agua desde el fondo del pozo hacia arriba es de 3.5 m, ¿cuántos litros de agua contiene el pozo?

3. ¿Cuál es la relación entre la altura de un cilindro y la de un cono si los dos sólidos son iguales en base y volumen? Justifica tu respuesta.
4. Redacta un escrito en el que justifiques la fórmula que sirve para calcular el volumen de un cono. Presenta tu escrito al profesor para que lo valide.

Habilidades digitales

Realiza una búsqueda en internet para que conozcas algunas aplicaciones prácticas sobre volúmenes de cilindros y conos. Puedes comenzar ingresando a la siguiente dirección electrónica:
quiz.uprm.edu/tutorial_es/geometria_part6/geometria_part6_right.xhtml
(Consulta: 12 de enero de 2015).
Describe alguna aplicación del cilindro y del cono que te haya parecido interesante.

Bloque CINCO

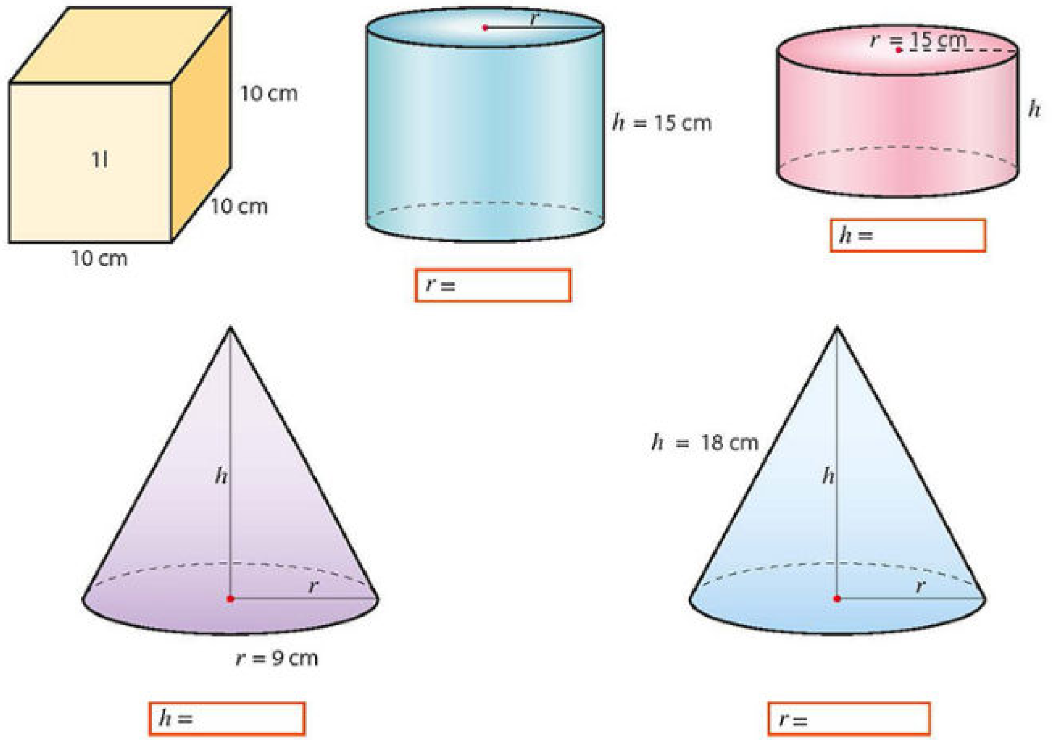
Medida

Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas

ACTIVIDADES INICIALES

Todos los sólidos tienen el mismo volumen

Calcula la variable desconocida en cada caso; parte de la consigna de que todos los cuerpos sólidos deben tener el mismo volumen.



Revisen sus respuestas y justifíquenlas. Después despejen cada una de las variables indicadas, de las siguientes fórmulas de volumen.

a) Si $V = \pi r^2 h$, entonces $h =$ y $r =$

b) Si $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, entonces $r =$ y $h =$

Soliciten al profesor que valide cada una de sus respuestas.

CONSTRUYO MIS CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES

Estimación y cálculo del volumen de cilindros

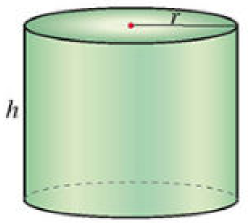
Glosario

valor estimado. Se obtiene mediante cálculos mentales y aproximaciones.

Luis y Marta decidieron aplicar sus conocimientos sobre cálculo de volúmenes. Primero escribían un **valor estimado** y luego calculaban el valor con la fórmula.

Luis estimó que el volumen del cilindro es 2000 cm³, mientras que Marta estimó que es de 1800 cm³.

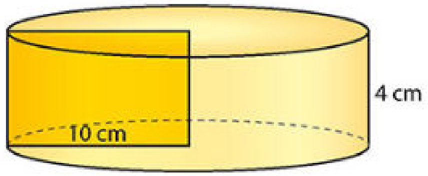
¿Quién obtuvo la mejor estimación?



$r = 8$ cm
$h = 11$ cm

Analicen los siguientes planteamientos. Posteriormente, estimen el valor y calcúlenlo con la fórmula adecuada, comparen la diferencia entre los valores.

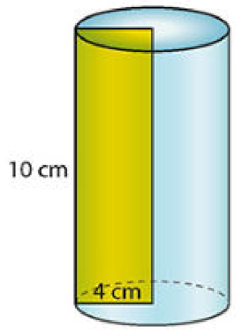
1. ¿Con cuál giro del rectángulo se genera un cilindro de mayor volumen? ¿Cuánto volumen extra se obtiene con el mayor?



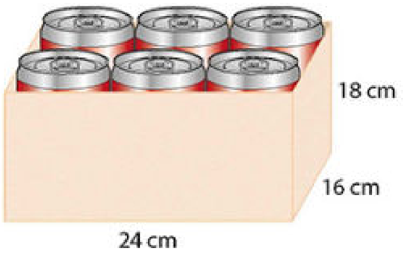
Valor calculado = ______

Valor estimado = ______

Diferencia = ______



2. En una caja se empacan 6 latas de refresco ¿Qué porcentaje del espacio de la caja queda vacío?



Valor calculado = ______

Valor estimado = ______

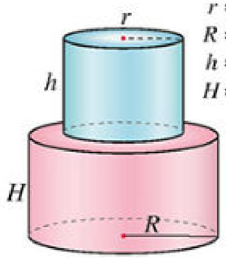
Diferencia = ______

3. ¿Cuál es el volumen del sólido geométrico formado por dos cilindros?

Valor calculado = ______

Valor estimado = ______

Diferencia = ______



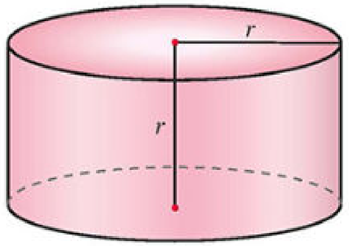
$r = 1.5$ cm
$R = 4$ cm
$h = 3.1$ cm
$H = 6$ cm

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y verifíquenlas.

Bloque CINCO

Lean, analicen, completen y expliquen los procedimientos para resolver cada problema.

1. La altura de una vasija cilíndrica de 10 l de capacidad es igual a su radio. ¿Cuánto miden la altura y el radio?



Recuerden que:

1 l = 1 dm^3

1 l = 1 000 cm^3

Si $V = \pi r^2 h$ y $h = r$, entonces la ecuación se reescribe como:

$V = \pi$ ____________________

Al dividir entre π, se obtiene $r^3 = \frac{V}{\pi}$

$r^3 = \frac{10\,000 \text{ cm}^3}{}$ $\qquad r^3 =$ ____________________

Estimen un valor para r y verifiquen su respuesta.

$V = 3.1416(\quad)^2(\quad)$

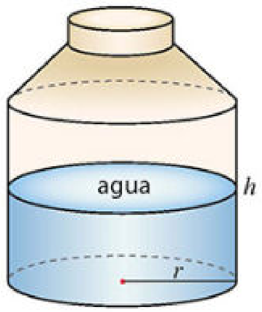
$V =$ ____________________

2. ¿Cuántos metros cúbicos de tierra se sacaron para hacer un túnel de 50 m de largo y de sección transversal igual a un semicírculo de 8 m de radio?

3. Estimen la capacidad de un tinaco y después calcúlenla detalladamente.

Comparen el resultado del cálculo con la estimación inicial.

$r = 1.20$ m
$h = 2.00$ m

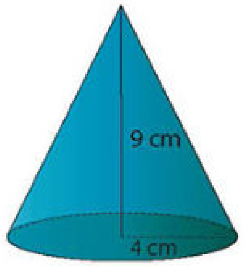


Comunico

Selecciona y resuelve alguno de los problemas anteriores. Elabora un diagrama en el que describas los pasos que seguiste. Preséntalo a tu profesor para que valide el procedimiento.

Estimación y cálculo del volumen de conos

Mónica y Saúl estimaron el volumen del cono que se muestra a la derecha.

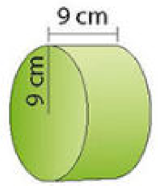


Mónica $V = 147$ cm^3

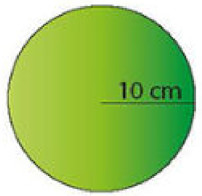
Saúl $V = 155$ cm^3

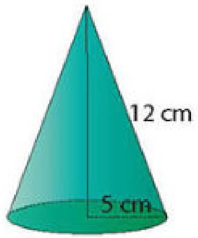
Calcula el volumen del cono y compara tu respuesta con las estimaciones de Mónica y Saúl para saber quién estuvo más cerca del resultado.

Escribe una estimación para cada problema, calcula el valor necesario en cada caso y compara los valores.



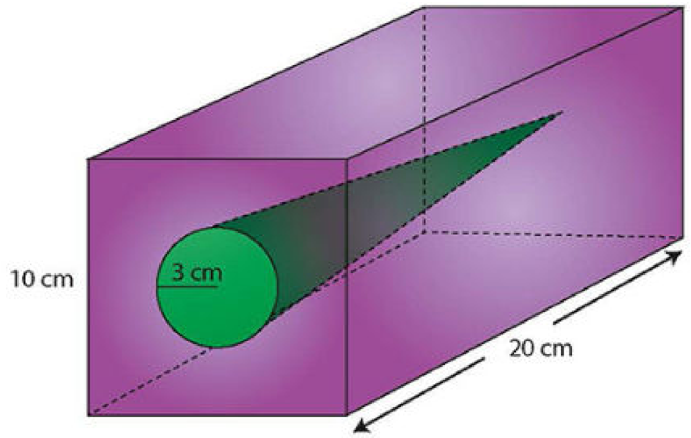
1. Mónica hizo un cilindro de plastilina como el de la figura izquierda. Con la misma cantidad de plastilina elaborará un cono con una base igual a la del círculo verde, ¿qué altura alcanzará el cono?





2. Saúl moldeó un cono de plastilina con las mismas medidas mostradas en la figura de la izquierda. Después lo deshizo y construyó un cilindro con la base igual a la del círculo rosa. ¿Cuál será su altura?

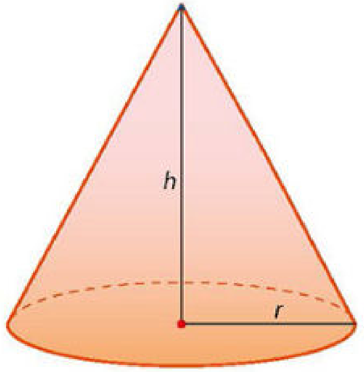
3. Calcula el volumen del espacio que queda entre el paralelepípedo y el cono de la figura inferior.



Comparen sus respuestas y verifíquenlas.

Lean, analicen y completen los dos procedimientos empleados para resolver el siguiente problema.

Si se desea construir un cono con un volumen de 42.5425 cm³ y una altura de 6.5 cm. ¿Cuánto debe medir el radio?



1. Se escribe la fórmula del volumen del cono y se despeja la variable desconocida $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Se multiplica por 3 en ambos miembros de la igualdad:

$$3V = (\qquad)$$

Después se dividen entre πh ambos miembros: $\frac{3V}{\pi h} = \frac{\pi r^2 h}{}$

Se extrae la raíz cuadrada en ambos miembros:

$$\sqrt{r^2} = \sqrt{\frac{}{\pi h}} \qquad r = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$$

Se aplica la fórmula obtenida, sustituyendo los valores conocidos y se calcula el valor numérico para r.

Si h = 6.5 cm, V = 42.5425 cm³, entonces r = ____________________

2. Se usa la fórmula para calcular el volumen del cono y se sustituyen los valores conocidos.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad V = \frac{1}{3}(\qquad)r^2(\qquad)$$

Por último se obtiene una ecuación y se resuelve: $6.8068\,r^2 = \frac{42.5425}{6.8068}$

$$r^2 = \frac{42.5425}{6.8068} \qquad r = \sqrt{6.25} \qquad r = 2.5 \text{ cm}$$

Apliquen los dos procedimientos anteriores para resolver la situación que se plantea en la siguiente cápsula.

Aplico

Se va a elaborar un recipiente con forma de cono, cuya capacidad es de 2 l y la longitud del radio mide 10 cm. ¿Cuál será su altura?

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

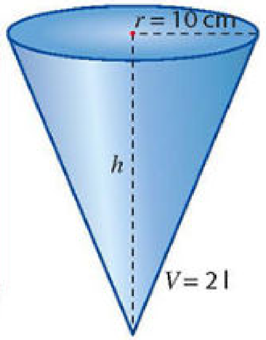
h = ________

h = ________

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

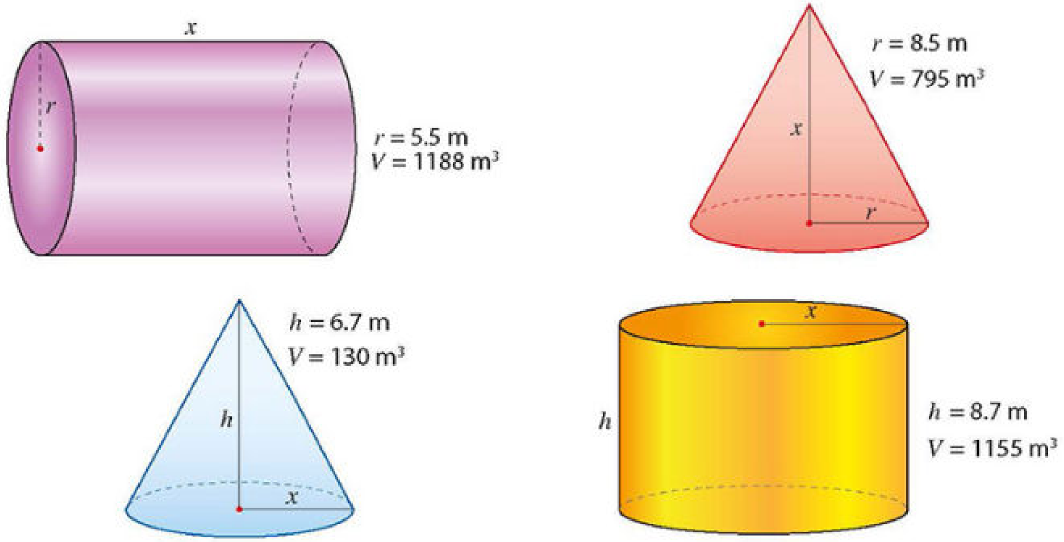
$(\quad) = \frac{1}{3}(3.1416)(10^2)h$

h = ____________



Actividad extraclase Analiza cada uno de los planteamientos y realiza lo que se solicita.

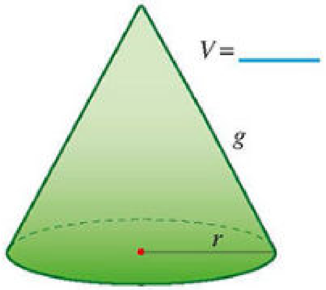
1. Calcula el volumen de un cilindro cuyas medidas son r = 8 cm y h = 15 cm. ¿Cuál es el error que se comete al usar $\pi = 3.14$ en lugar de $\pi = 3.14159$?
2. Contruye una fórmula para calcular el volumen de un cilindro en el que la altura es igual al diámetro de la base.
3. Si el volumen de un cilindro es de 5 000 m³ y la altura mide 20 m, ¿cuál es la longitud del radio de la base? Haz una estimación y compruébala realizando los cálculos necesarios.
4. Calcula el valor de x en cada situación.



5. Escribe una fórmula para calcular la altura de un cono, conociendo el volumen de éste y el radio de su base.
6. Determina una fórmula para calcular el radio de la base de un cono, contando con los datos del volumen y la altura del mismo.

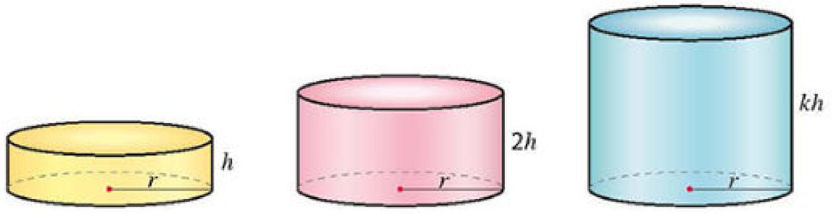
Pienso

Plantea una fórmula para determinar el volumen de un cono, si se conoce el valor de la generatriz (g) y el radio de su base.



Relaciones de variación en cilindros y conos

¿Cuál es la relación entre la altura y el volumen de un cilindro cuando el área de la base permanece constante?



¿Cuáles son las razones de las alturas? ¿Cómo se pueden obtener las razones de los volúmenes?

$$\frac{\pi r^2(2h)}{\pi r^2 h}=2 \qquad \frac{\pi r^2(\quad)}{\pi r^2 h}= \underline{\qquad}$$

Comprendo

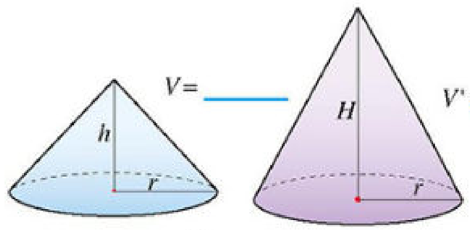
Los volúmenes de dos cilindros con bases iguales son directamente proporcionales a sus alturas.

Hagan un análisis semejante al anterior para explicar la siguiente afirmación:

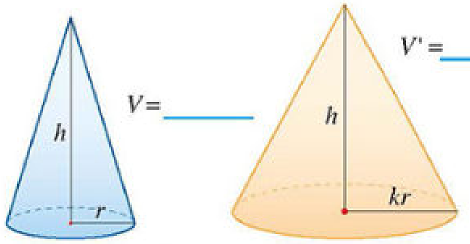
Los volúmenes de dos cilindros de alturas iguales son directamente proporcionales a las áreas de sus bases.

Lee, analiza, completa y justifica las siguientes situaciones.

1. ¿Cuál es la relación entre la altura de un cono y su volumen, cuando el radio de la base permanece constante?



$V =$ ______ $V' =$ ______ $\frac{V'}{V} =$ ______



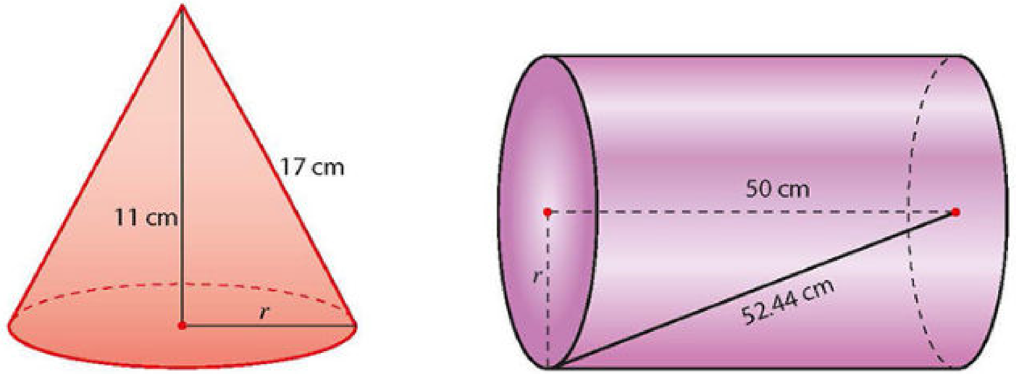
$V =$ ______ $V' =$ ______ $\frac{V'}{V} =$ ______

2. ¿Cuál es la relación entre el volumen de un cono y el área de su base, cuando la altura permanece constante?

Comparen las respuestas obtenidas y verifíquenlas.

Con la finalidad de que apliques los conocimientos adquiridos con relación al cálculo de volúmenes de cilindros y conos, realiza lo que se solicita a continuación.

1. Calcula el volumen de cada sólido.



$V =$ ______ $V =$ ______

2. Determina el volumen de hierro utilizado para fabricar un tubo cilíndrico con una longitud de 200 cm, si el radio interior es $r = 20$ cm, y el radio exterior mide $R = 22$ cm.
3. Construye una fórmula para calcular el área de la base de un cono, si se conoce el volumen y la altura del mismo.

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

4. Dos conos de metal iguales se funden para hacer un cilindro. Si las bases del cilindro medirán lo mismo que las de los conos, ¿cuál será la altura del cilindro?

Comunico

Redacta un escrito para comunicar el procedimiento seguido y el resultado obtenido.

Habilidades digitales

Realiza una búsqueda en internet sobre el cálculo de las distintas variables involucradas en la fórmula para obtener el volumen de cilindros y conos; puedes iniciar consultando la siguiente dirección electrónica:
recursostic.educacion.es/secundaria/edad/2esomatematicas/2quincena10/index2_10.htm
(Consulta: 12 de enero de 2015).
Describe algunos procedimientos que se pueden usar para calcular las dimensiones de cilindros y conos.

Proporcionalidad y funciones

Bloque CINCO

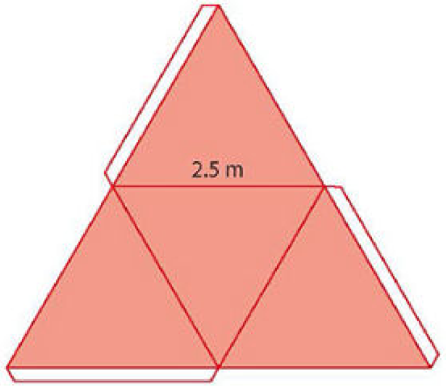
Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades

ACTIVIDADES INICIALES

Representación algebraica de una relación

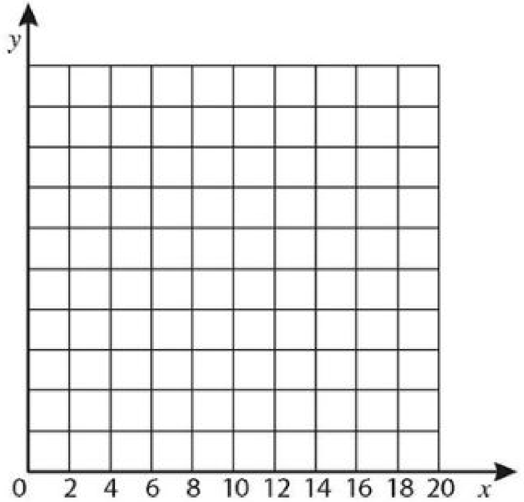
Jessica y Román han observado que el tetraedro se utiliza para envasar diferentes productos.

Hicieron varias plantillas semejantes a la que se presenta en la ilustración y, para cada una de ellas, calcularon una superficie aproximada del material que necesitan para su fabricación.



Lee y analiza la situación presentada por Jessica y Román; posteriormente, completa las representaciones gráficas y algebraicas de la relación entre la longitud (x) de las aristas del tetraedro y el área (y) aproximada de la plantilla (se desprecia el material utilizado para las pestañas de la misma).

x	y
2.5	
4.5	
8	
9.5	
10.7	
15.3	
18.5	



Comparen sus resultados y verifiquen sus respuestas.

CONSTRUYO MIS CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES

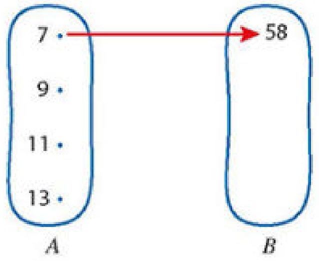
¿Cómo se representa la variación entre dos conjuntos de cantidades?

Ángel y Carmen analizaron una situación que observaron cada vez que realizaban un viaje en taxi.

Ángel dijo que el costo de cada viaje dependía del número o la cantidad de kilómetros recorridos, así que presentó los siguientes datos para apoyar su afirmación.

Viaje 1	Viaje 2	Viaje 3
7 km – \$58	9 km – \$71	11 km – \$84

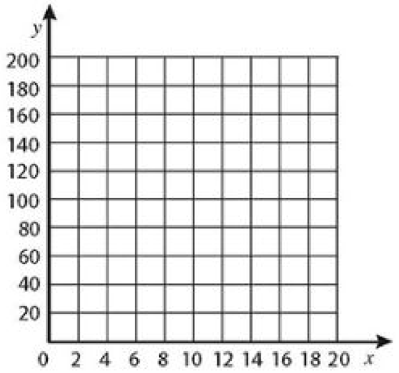
Carmen comenzó a organizar la información anterior de una manera distinta a la de Ángel.



x	y
7	58
9	
11	
13	
15	
17	
19	

Analicen la situación anterior y realicen lo que se solicita.

1. Completen y describan las representaciones que comenzaron Ángel y Carmen.
2. ¿Por qué se puede afirmar que x es una **variable independiente**, mientras que y es una **variable dependiente**?
3. Representen de manera gráfica la variación que se presenta entre las cantidades del conjunto A y las del conjunto B, y señalen el tipo de variación de que se trata.
4. Expresen algebraicamente la relación entre las variables x y y.



Glosario

variable dependiente. Su valor depende del valor seleccionado para la variable independiente.

variable independiente. Puede cambiar libremente su valor.

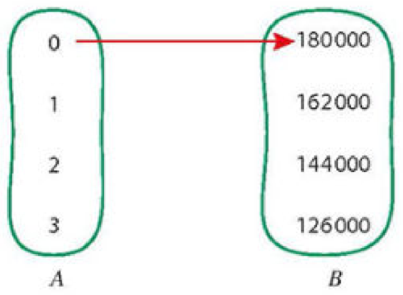
Comparen las respuestas obtenidas, verifíquenlas con su profesor.

¿Cómo se representa una relación lineal entre dos conjuntos de cantidades?

Los **economistas** estudian la depreciación de los bienes. Por ejemplo, si se considera que la vida útil de un automóvil es de 10 años y que costó \$180 000.00; la depreciación que sufrió este valor se puede representar de varias formas.

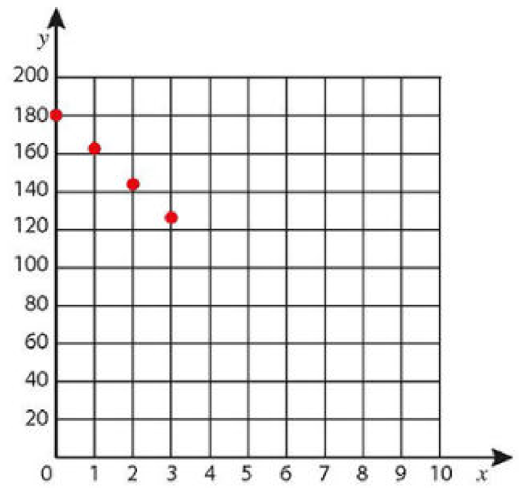
Glosario

economistas. Profesionales que estudian la producción y distribución de los bienes.



(0, 180 000)	(1, 162 000)
(2, 144 000)	(3, 126 000)
(4,)	(5,)
(6,)	(7,)
(8,)	(9,)
(10,)	

x	y
0	180 000
1	162 000
2	144 000
3	126 000
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	



Comprendo

La relación lineal entre el conjunto de los años transcurridos y el conjunto de datos sobre el valor monetario del automóvil se puede representar algebraicamente mediante: $y = 180\,000 - 18\,000x$.

Representa la depreciación del automóvil considerando todos los valores posibles para la variable independiente x y los valores correspondientes para la variable dependiente y.

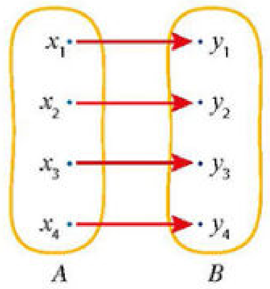
Pienso

Explica por qué se trata de una relación lineal entre las variables x y y.

Generalizo

Una expresión algebraica de la forma $y = mx + b$ indica que existe una variación lineal entre un conjunto de cantidades x y un conjunto de cantidades y. La variable independiente de la relación es x, mientras que y es la variable dependiente.

La expresión algebraica $y = mx + b$ se denomina regla de correspondencia y sirve para calcular el valor de y relacionado o asociado con un valor seleccionado para x.



Analicen las siguientes situaciones y realicen las representaciones que hagan falta en cada caso.

1. Sebastián se dedica a la venta de computadoras; recibe un salario base de \$3 000.00 y una comisión de \$800.00 por cada computadora que vende.

   a) Completen la tabla con base en el salario de Sebastián, donde x es el número de computadoras vendidas.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y								

   b) ¿Cuál es la representación algebraica de la relación entre el número de computadoras vendidas y la percepción total de Sebastián?

   c) Construyan la representación gráfica de la relación lineal obtenida en el inciso anterior.

2. Julián y Rosa fueron a una feria en la que cada entretenimiento o juego mecánico tenía un costo de \$35.00 por persona. Entre los dos llevaban \$770.00. Establezcan una relación que involucre el número de entretenimientos al que tuvieron acceso y el dinero con el que contaban.

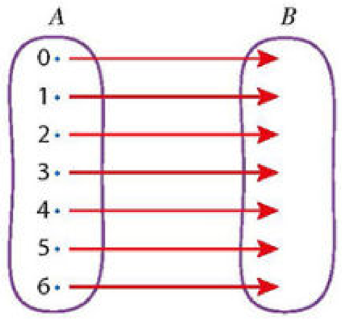
   a) ¿Es una relación lineal? ¿Por qué?

   b) ¿Cuál es la expresión algebraica para la relación obtenida?

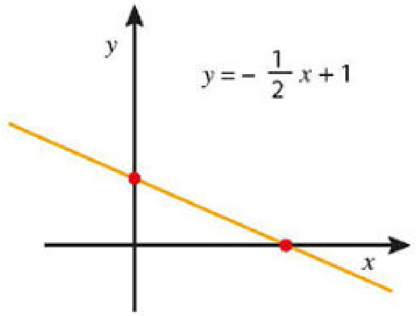
   c) Completen la representación tabular y el diagrama entre conjuntos.

   d) Representen gráficamente la relación lineal obtenida.

x	y
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	



Una relación lineal se representa algebraicamente en la forma $y = mx + b$, donde x es la variable independiente y y la variable dependiente, la regla de correspondencia permite que para cada valor de x se obtenga un valor correspondiente para y.



La variable independiente x puede tomar valores positivos o negativos, valores decimales y también raíces inexactas como $\sqrt{3}$, pero la gráfica de la relación será siempre una línea recta.

Determina la expresión algebraica de la forma $y = mx + b$ como modelo matemático para cada una de las situaciones que se plantean a continuación.

1. Germán rentó un tractor. La tabla muestra las cantidades que le cobraron por horas.

Horas	4	7	10	12
Costo ($)	1 300	1 600	1 900	2 100

2. Rosa indica en la tabla el costo y de fabricar x número de vestidos.

x	100	200	300	400
y	15 000	25 000	35 000	45 000

Analicen cada una de las situaciones y determinen la representación algebraica. Definan las variables independiente y dependiente en cada caso, y construyan las gráficas correspondientes.

1. El grosor y la longitud del cabello humano dependen de muchas circunstancias, pero en promedio crece 0.4 mm por día y su diámetro promedio es de 0.08 mm.

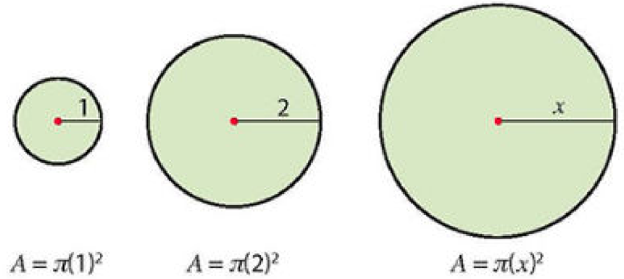
   Si Mario se hizo un corte de pelo, dejándoselo con una longitud de 3 cm ¿cómo se representa algebraicamente el crecimiento del cabello?, ¿en cuánto tiempo alcanzará una longitud de 10 cm?

2. Patricia participará en una campaña sobre "Alimentación saludable". La masa del cuerpo de Patricia es de 85 kg; mediante una dieta médica reducirá 250 g cada día. ¿Cuál es la expresión algebraica que modela la variación de la masa corporal de Patricia con el transcurso de los días?

3. ¿Cuál es la expresión algebraica con la que se puede indicar la variación del perímetro de un rectángulo en el que dos de sus lados miden x metros y los otros miden $x + 12$ metros?

¿Cómo se representa una relación cuadrática?

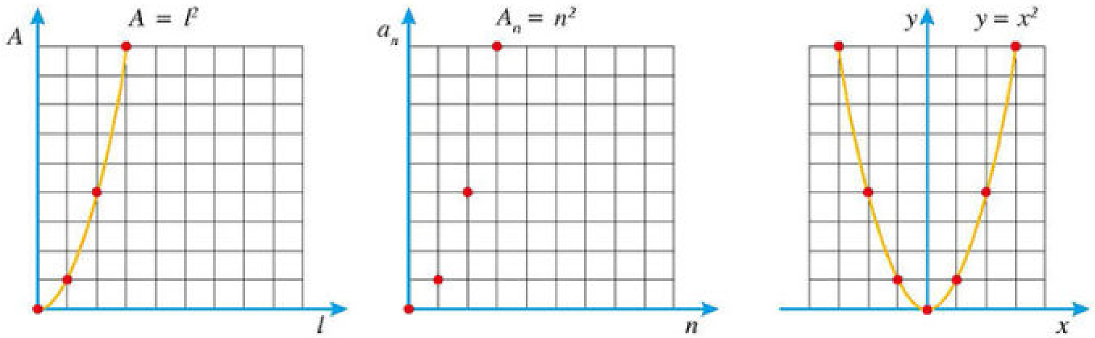
Analicen la variación de la longitud del radio de un círculo y la variación de su área. Para ello, observen la figura y expliquen por qué se puede considerar que el área depende de x.



1. Determinen la variable independiente.
2. ¿Cuál es la variable dependiente?
3. ¿Cuál es la regla de correspondencia de la relación?
4. ¿Por qué se puede afirmar que ahora se trata de una relación cuadrática o una relación de segundo grado?

Una relación cuadrática es una expresión algebraica de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

¿Qué diferencias y semejanzas existen entre las siguientes expresiones algebraicas?



Actividad extraclase

Calcula los valores de y que hacen falta en las tablas de las relaciones cuadráticas.

1. $y = 2x^2 + 8x - 2$

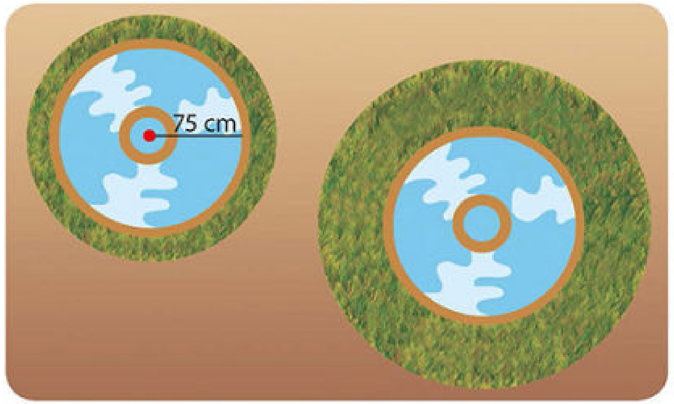
x	−2	−1	0	1	2	3
y						

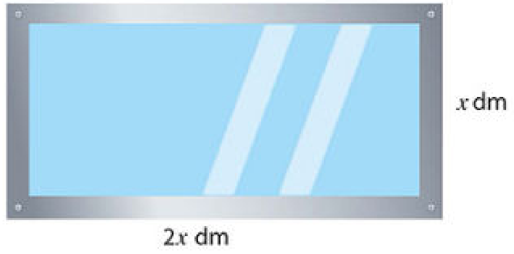
2. $y = -3x^2 + 4x - 1$

x	−3	−2	−1	0	1	2
y						

Para que en diferentes situaciones y fenómenos, reconozcas la presencia de cantidades que varían y que se pueden modelar con una relación cuadrática, analiza los casos y responde lo que se solicita.

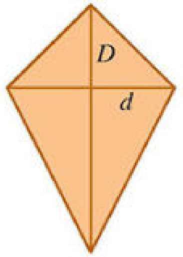
1. Laura desea hacer un jardín alrededor de una fuente circular. ¿Cómo se puede expresar el área de la parte verde del jardín considerando que el ancho puede variar?



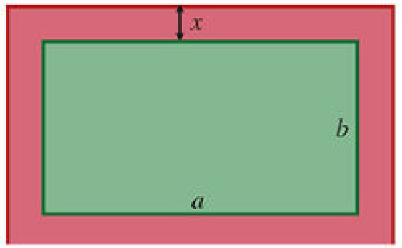


2. Erasmo se dedica a la fabricación de ventanas. El metro cuadrado de vidrio cuesta \$150 y el metro lineal de solera de aluminio cuesta \$100. ¿Cómo se puede representar el costo de la ventana cuya forma se muestra en la ilustración?

3. Arturo construirá cometas en los que se cumpla la relación $D = 1.5\,d$. ¿Cómo se puede expresar el área en términos de la longitud de la diagonal menor?

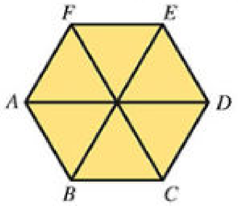


4. Calcula el área del marco, considerando que a y b son constantes, mientras que x es variable.



5. Justifica la siguiente fórmula para calcular el número de diagonales que se pueden trazar en un polígono de n lados.

¿Cuál es la variable dependiente y cuál la independiente?



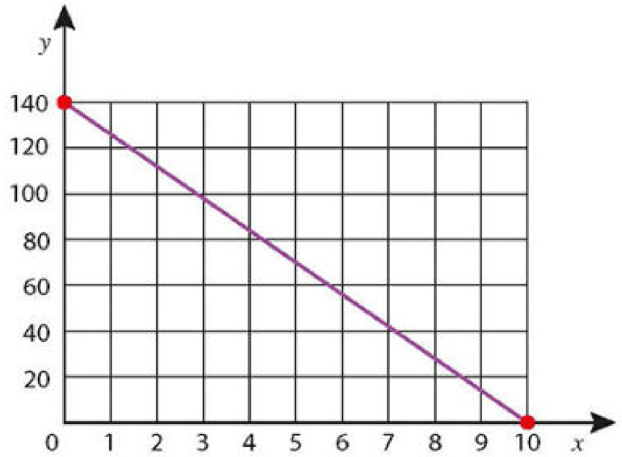
$$d = \frac{n^2 - 3n}{2}$$

Lee y representa lo que se solicita en cada caso. Indica si se trata de una relación lineal o de una cuadrática.

1. Laura revisa la etiqueta de un vestido, observa el precio y lo multiplica por 0.30 debido al descuento, resta el resultado al precio original. Después lo multiplica por 0.16, para calcular el impuesto, y lo suma al precio con descuento. Hace la factura para cobrarle al cliente. Construye una expresión algebraica que permita calcular el precio final y de los vestidos cuando se conoce el precio original x.

x | $x - 0.30x$ | $(0.70\,x)(0.16)$ | $y =$

2. Escribe la representación algebraica de la relación expresada en la gráfica de la derecha.



3. Plantea una situación que se pueda resolver con la expresión algebraica obtenida en el punto anterior y preséntala al profesor.

4. Justifica la afirmación: "La expresión algebraica $y = px^2 + qx + r$ es la representación de una relación cuadrática entre las variables x y y. La variable independiente es x, y la variable dependiente es y".

Habilidades digitales

Para reafirmar los conocimientos adquiridos sobre variaciones lineales y cuadráticas, realiza una búsqueda en internet; puedes comenzar ingresando a la siguiente dirección electrónica:
http://rincones.educarex.es/matematicas/index.php/analisis-mat-i/animaciones-analisis-mat-i/554-funcion-lineal-y-cuadratica-2
(Consulta: 11 de agosto de 2014).
Selecciona y describe un ejemplo para cada disciplina.

Nociones de probabilidad

Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables

ACTIVIDADES INICIALES

Lanzamiento de dados

Con el lanzamiento de 2 dados se pueden efectuar diferentes experimentos aleatorios y los resultados posibles son diversos. A continuación se presentan dos ejemplos.

Completa lo que falta en cada caso y calcula las probabilidades que se indican.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4				
⚂						
⚃						
⚄						
⚅						

1. En este caso, hay que observar la suma de los puntos que se obtienen en los 2 dados. Los resultados posibles son:
$E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

 a) Calcula estas probabilidades:

 $P(2) =$ $P(12) =$
 $P(7) =$ $P(8) =$
 $P(9) =$ $P(6) =$

 b) Si Alfredo gana cuando la suma de ambos dados es 2, 3, 4, 5, 6 o 7, y Laura gana cuando se obtiene 8, 9, 10, 11 o 12. ¿Se trata de un **juego equitativo**?

Glosario

juego equitativo. Es el juego en el que todos los jugadores tienen la misma probabilidad de ganar.

2. Ahora se debe calcular el producto de los puntos de las tiradas de cada uno de los 2 dados.

 a) ¿Cuáles serían los resultados posibles para este caso?

 b) Calcula las probabilidades:

 $P(1) =$ $P(36) =$
 $P(12) =$ $P(20) =$
 $P(9) =$ $P(16) =$

 c) ¿Cómo estaría organizado un juego equitativo en el que participarán tres jugadores?

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1	2	3			
⚁						
⚂			9			
⚃				16		
⚄	5					
⚅						

Probabilidad y técnicas de conteo

Completen las tablas y calculen las probabilidades que se solicitan.

1. Una familia con dos hijos puede tener dos niños, dos niñas, o bien, un niño y una niña. Si se escoge al azar a una familia con dos hijos, ¿cuál es la probabilidad de que tenga exactamente un niño y una niña? Usen una tabla para determinar el espacio de resultados posibles y calculen la probabilidad indicada.

	Niño	Niña
Niño		
Niña		

2. Determinen la probabilidad de que en el lanzamiento de una moneda y un dado se obtenga un águila y un múltiplo de 3.

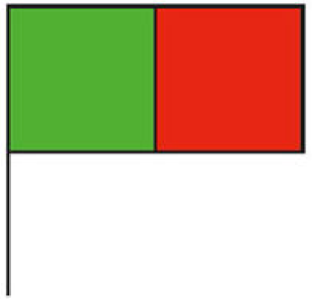
	1	2	3	4	5	6
Águila					$(5, a)$	
Sol		$(2, s)$				

3. Ahora calculen la probabilidad de obtener, por lo menos, un águila en 2 lanzamientos de 2 monedas.

	a	s
a		
s		

4. Una bandera de dos lienzos se puede hacer de tal manera que el primer lienzo sea blanco, verde o amarillo, y el segundo, sea negro o rojo. Calculen la probabilidad de que al escoger al azar alguna de estas banderas se seleccione la bandera verde y rojo.

	b	v	a
n			
r			



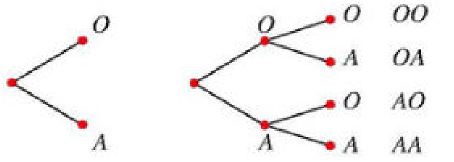
(v, r) es un resultado posible.

5. ¿Cuántos números de dos dígitos diferentes de cero se pueden escribir? ¿Cuántos de estos números son múltiplos de 3? Calculen la probabilidad de que al escoger al azar uno de estos números se obtenga un múltiplo de 3.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2							27		
3			33						
4									
5									
6	61			64					
7									
8									
9									

Los diagramas de árbol se pueden usar para conocer el total de resultados posibles de un evento aleatorio.

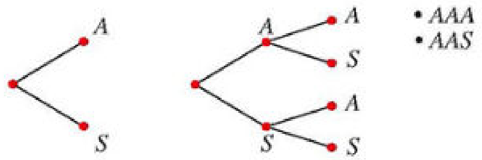
Apoyándote en un diagrama de árbol, explícale a un compañero el análisis de los posibles casos encontrados en una familia con dos hijos, donde: O indica niño y A indica niña.



En los casos AO, OA y AA hay por lo menos una niña. Esto se puede usar para calcular la siguiente probabilidad:

P ("Que una familia con dos hijos tenga por lo menos una niña") $= \frac{3}{4}$.

Ahora detalla cómo se usa un diagrama de árbol para establecer los resultados que se pueden obtener en el lanzamiento de tres monedas. Completa lo que hace falta. A indica águila y S indica sol.



Realicen lo que se solicita a continuación:

1. Calculen la probabilidad de que, al acomodar los números 1, 2 y 3 al azar, el 2 ocupe el lugar que le corresponde en orden ascendente.
2. Usen un diagrama de árbol para calcular la probabilidad de que en el lanzamiento de dos dados, por lo menos en uno aparezca el número 1.
3. Calculen la probabilidad de que un número de dos cifras sea múltiplo de 5.
4. Calculen la probabilidad de que en el lanzamiento de un dado y una moneda, se obtenga el resultado (número 5 en el dado, sol en la moneda) que se representa mediante (5, s).

Espacios muestrales equiprobables y no equiprobables

¿Cuál es el espacio muestral para el lanzamiento de un dado?

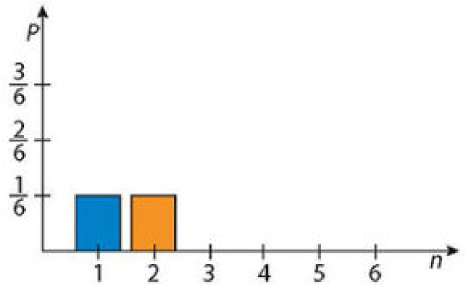
$E = \{ \qquad \}$

Si el dado es homogéneo y simétrico, es decir, que no está cargado, todos los resultados posibles tienen la misma probabilidad de ocurrir.

¿Cuál es el valor de cada una de las probabilidades?

$P(1) =$ $P(2) =$ $P(3) =$ $P(4) =$ $P(5) =$ $P(6) =$

¿Cómo puedes completar la siguiente gráfica?



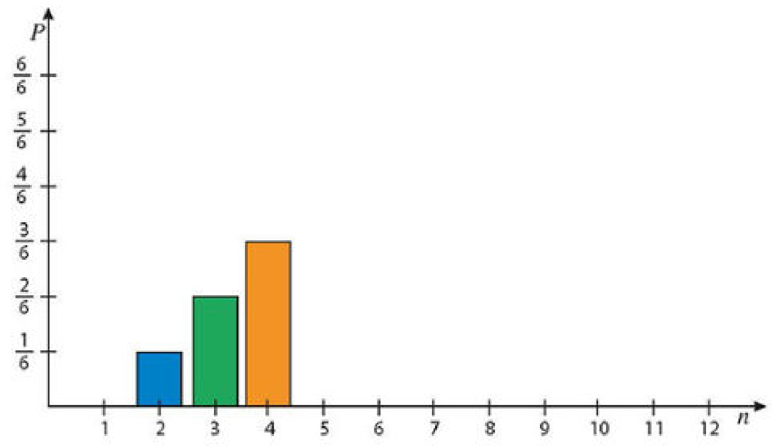
Para este tipo de situaciones de probabilidad, se afirma que el espacio muestral es equiprobable, puesto que los resultados posibles tienen las mismas probabilidades de ocurrir.

Pienso

Completen la siguiente tabla de probabilidades para el lanzamiento de dos dados, terminen la gráfica y expliquen por qué se habla en este caso de un espacio muestral no equiprobable.

$E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

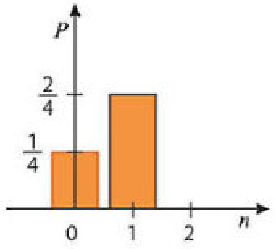
Suma de puntos	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilidad	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$								



Juegos de azar equitativos y no equitativos

Saúl propone un juego a Lucila y a Rubén: Lanzan dos monedas. Si caen dos águilas gana Lucila, si caen dos soles gana Rubén, y si caen un águila y un sol gana Saúl. ¿Crees que es un juego equitativo?

Tomando en cuenta el número de soles, hay tres resultados posibles. Completa la gráfica del juego y justifica tu respuesta.
$E = \{0, 1, 2\}$



Analicen el juego y determinen si es justo para todos los jugadores.

Yolanda y Zenón tiran dos dados. Para cada lanzamiento, se calcula el resultado a partir de las siguientes reglas:

1. Si el número de puntos en ambos dados es el mismo, el resultado es 0.
2. En caso contrario, el resultado se obtiene restando el número menor de puntos del número mayor.

Yolanda gana si el resultado es 0, 1 o 2; pero si es 3, 4 o 5, entonces gana Zenón.

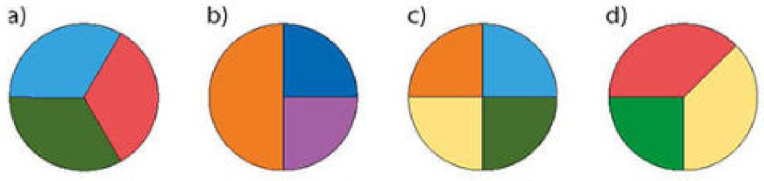
Determinen:

a) Un espacio muestral $E = \{ \qquad\qquad \}$
b) Una gráfica
c) Una tabla de probabilidades

Resultados						
Probabilidad						

Si no es equitativo, ¿cómo se podría organizar uno que sí lo sea con las condiciones iniciales del juego?

Aplico



Determinen los espacios muestrales para cada ruleta.
Calculen las probabilidades de todos los resultados posibles.
¿Qué espacios muestrales son equiprobables?
¿Cuáles no lo son?
Inventen un juego equitativo usando la ruleta del inciso b). Comparen su juego con el de otros compañeros.
¿Pueden hacer algo parecido con la ruleta del inciso d)?

Actividad extraclase

Investiga otras aplicaciones de la probabilidad en los juegos de azar en: *El secreto de los números* de A. Jouette.

Un reparto justo con base en la probabilidad

Francisco y Alfonso participan en un juego de *Jai Alai* en el que quien complete tres partidos ganados se adjudicaría un premio de $600.00; sin embargo, el juego se tuvo que suspender en el momento en que Francisco llevaba dos partidos ganados y Alfonso uno.

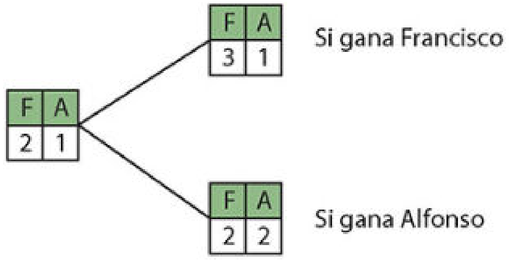
Francisco	Alfonso

¿Cómo se deben repartir el premio?

Junto con otros compañeros, propongan una solución para el problema de Alfonso y Francisco, compárenla con las soluciones de otros grupos de compañeros.

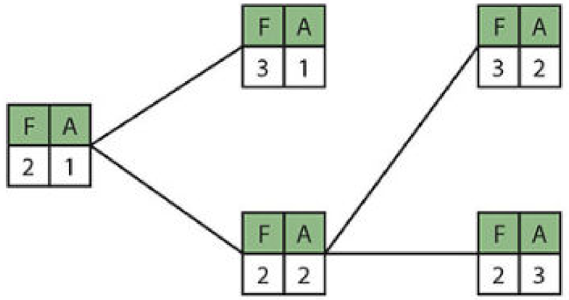
F	A
2	1

Pueden formularla usando un diagrama de árbol; tomen en cuenta que los dos jugadores tendrían la misma probabilidad de ganar cada uno de los partidos.



En la tabla se presentan los resultados que se tenían al suspenderse el juego.

El próximo partido podría ganarlo cualquiera de los dos jugadores, lo cual se puede representar así:



En el primer caso, el juego terminaría porque Francisco habría ganado tres partidos, en el segundo caso, sería necesario jugar otro partido.

Usando el diagrama de árbol explica por qué Francisco debe recibir $450.00 y a Alfonso le corresponden $150.00.

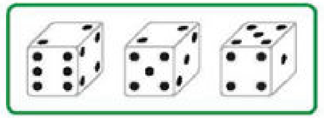
Comunico

Explica tus resultados en un escrito y preséntalo al profesor.

Realiza lo que se solicita en cada caso.

1. Lanzamientos de tres dados
   Álvaro y Rosa afirman que al jugar con tres dados se pueden obtener las sumas 9 y 10, y que estos resultados tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

631	622	541	532	442	433
621	531	522	441	432	333



   Calcula *P*(suma de puntos sea 9) y *P*(suma de puntos sea 10) y verifica si están equivocados.

2. Lanzamientos de dos monedas
   Óscar y Elia juegan con dos monedas. Óscar gana si en el lanzamiento de las dos monedas se obtienen dos águilas o dos soles, mientras que Elia gana si en los lanzamientos salen un águila y un sol. ¿Se trata de un juego equitativo? Explica por qué lo consideras así.

3. Lanzamientos de dos dados
   Homero y Elena juegan con dos dados y los resultados se obtienen sumando los puntos. Homero le apuesta a los números 3, 5, 7, 9 y 11. Elena gana con las sumas 2, 4, 6, 8, 10 y 12.
   ¿Quién tiene más ventaja? Justifica tu respuesta.

4. De un grupo de 10 personas se escogen al azar a dos de ellas y se les pregunta: "¿En qué día de la semana nacieron?". Calcula la probabilidad de que ambas proporcionen la misma respuesta.

5. Inventa un juego equitativo para tres personas con el lanzamiento de tres monedas.

Comunico

Determina un espacio muestral y realiza una gráfica. Presenta tus resultados al profesor.

Habilidades digitales

Para conocer más acerca de juegos probabilísticos, realiza una búsqueda en internet; puedes comenzar ingresando a la siguiente dirección electrónica:
http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/telesecundaria/tsa01g01v02/u03t04s01.html
(Consulta: 24 de septiembre de 2014).
Describe las características de un juego de azar justo que hayas encontrado en tu búsqueda por la red.

Evaluación final

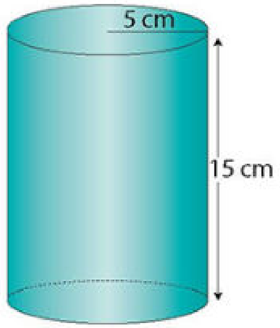
Analiza cada planteamiento y responde lo que se solicita.

1. Para el experimento aleatorio del lanzamiento de 3 monedas, describe los eventos complementarios para estos eventos.
   a) Cayeron 3 águilas
   b) Cayeron 2 águilas

   En cada caso calcula las probabilidades necesarias para verificar que se cumple la igualdad:

$$P(A) + P(A') = 1$$

2. En una empresa donde procesan hojuelas de avena utilizan envases cilíndricos como el de la figura. ¿Cómo cambiará el volumen del cilindro si las dimensiones se modificarán tal como se indica en el recuadro?



El radio disminuye 10 %

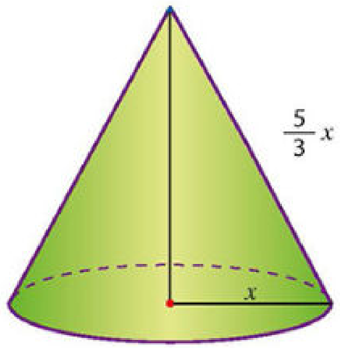
La altura aumenta 10 %

3. Describe la relación que se expresa con las variables de la fórmula para calcular el volumen de un cono cuando alguna de éstas permanece constante.

   a) ¿Cuál es la relación entre el volumen y la altura de un cono cuando el radio de la base es constante?

   b) ¿Qué tipo de relación hay entre el volumen y el radio de un cono cuando la altura permanece constante?

4. ¿Cuál es la fórmula que permite calcular el volumen del cono de la figura de abajo?



Con este código, evalúa tus habilidades para resolver problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Marca el círculo que contenga la respuesta correcta a cada cuestión. En tu cuaderno escribe los razonamientos y procedimientos que hayas seguido para obtener dicha respuesta.

1. Las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 - 9 = 0$ son…

   ○ 3 y -3 ○ 9 y -9 ○ $\sqrt{9}$ o $\sqrt{-9}$ ○ $-\sqrt{9}$ o $\sqrt{3}$

2. La expresión $y = ax^2 + bx + c$ representa a una relación…

   ○ Lineal ○ Constante ○ Cúbica ○ Cuadrática

3. La representación gráfica de una relación cuadrática es una…

   ○ Recta ○ Parábola ○ Circunferencia ○ Línea

4. Con esta fórmula, es posible calcular el volumen de un cilindro de radio x y altura y.

   ○ $v = \pi xy$ ○ $v = \pi xy^2$ ○ $v = \pi x^2y^2$ ○ $v = \pi x^2y$

5. La expresión $y = mx + b$ es una relación…

   ○ Cuadrática ○ Lineal ○ Cúbica ○ Constante

6. Ésta es la relación entre los volúmenes de un cono y un cilindro que tienen el mismo radio y altura.

   ○ $\frac{1}{4}$ ○ $\frac{1}{5}$ ○ $\frac{1}{6}$ ○ $\frac{1}{3}$

7. Si la altura de un cono se multiplica por k, su volumen es…

   ○ $v' = \frac{1}{k}v$ ○ $v' = kv$ ○ $v' = k^2v$ ○ $v' = v$

8. El volumen de un cono de radio p y altura q se puede calcular con la fórmula…

   ○ $v' = \frac{1}{3}\pi r^2h$ ○ $v' = \frac{1}{3}\pi p^2q$ ○ $v' = \pi r^2h$ ○ $v' = \pi p^2q$

9. Si el radio de un cilindro se multiplica por k, entonces su volumen es…

   ○ $V' = kV$ ○ $V' = k^2V$ ○ $V' = V$ ○ $V' = kV^2$

10. Las probabilidades de dos eventos complementarios…

   ○ Son iguales ○ Suman uno ○ Son negativas ○ Son diferentes

Bibliografía

Para el alumno

Alcalá, M., *Matemáticas re-creativas*, Barcelona: GRAÓ, 2004.
Amster, Pablo, *La matemática: como una de las bellas artes*, México, SEP/Siglo XXI, 2006 (Libros del Rincón).
Bosch, C. y Claudia Gómez, *Una ventana a la incertidumbre*, México, SEP/Santillana, 2003 (Libros del Rincón).
— *Una ventana a las formas*, México, SEP/Santillana, 2003 (Libros del Rincón).
Burgués C., Roser Codina y Manuel Montanuy, *Apuntes de matemáticas*, México, SEP/Parramón Ediciones, 2007 (Libros del Rincón).
Cerasoli, A., *La sorpresa de los números: Un viaje al fascinante universo de las matemáticas*, México, SEP/Ediciones Maeva, 2006 (Libros del Rincón).
Colera, J., Ignacio Gaztelu, M. y José Oliveira, *Matemáticas. Educación secundaria. Tercer curso*, Madrid, Anaya, 2010.
De la Peña, José Antonio, *Geometría y el mundo*, México, SEP/Santillana, 2002 (Libros del Rincón).
— *Matemáticas y la vida cotidiana*, México, SEP/Santillana, 2002 (Libros del Rincón).
Gómez, J., *De la enseñanza al aprendizaje de las matemáticas*, Barcelona, Paidós, 2002.
Jouette, A., *El secreto de los números*, México, SEP/Ediciones Robinbook, 2004 (Libros del Rincón).
Oster, Grigory, *El gran libro de las matemáticas del Ogro feroz*, México, SEP/Oniro, 2009 (Libros del Rincón).
Perelman, Y., *Álgebra recreativa*, México, Paz. (s.f.).
— *Matemáticas recreativas*, México, SEP/Planeta, 2003 (Libros del Rincón).
Poskitt, K., *Esa condenada mala suerte*, México: SEP/Editorial Motino, 2001 (Libros del Rincón).
Ruiz, C. y Sergio de Régules, *Crónicas algebraicas*, México, SEP/Santillana, 2002 (Libros del Rincón).
— *Crónicas geométricas*, México, SEP/Santillana, 2003 (Libros del Rincón).
— *El piropo matemático, de los números a las estrellas*, México, SEP/Editorial Lectorum, 2003 (Libros del Rincón).
Salamanca, Fabio, *El olvidado monje del huerto: Gregor Mendel*, México, SEP/Pangea Editores, 2003 (Libros del Rincón).
Tahan, M., *El hombre que calculaba*, México, SEP/Limusa, 2005 (Libros del Rincón).
— *Matemática divertida y curiosa*, Buenos Aires, Pluma y papel, 2006.
Wells, D., *El curioso mundo de las matemáticas*, Barcelona, Gedisa, 2000.
Yuste, P., *Matemáticas en Mesopotamia: álgebra, geometría y cálculo*, Madrid, Dykinson, 2013.

Para el maestro

Castro, R., *Didáctica de las matemáticas. De preescolar a secundaria*, Bogotá, Ecoe, 2011.
D'Amore, B., *Didáctica de la Matemática*, Barcelona, Reverté, 2005.
Flores, A. y Susana Victoria, *Introducción a la geometría con el geómetra*, México, Iberoamérica, 2001.
García, A., Martínez, A. y Miñano, R., *Nuevas tecnologías y enseñanza de las matemáticas*, Madrid, Síntesis, 2000.
Gómez, I., *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*, Madrid, Narcea, 2000.
Mochón, S., Teresa Rojano y Sonia Ursini, *Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo. Enseñanza de las matemáticas con tecnología*, México, SEP, 2000.
Montesinos, J., *Historia de las matemáticas en la enseñanza secundaria*, Madrid, Síntesis, 2000.
Ortega, T., *Conexiones matemáticas. Motivación del alumno y competencia matemática*, Barcelona, GRAÓ, 2005.
Segarra, Ll., *Problemates. Colección de problemas matemáticos para todas las edades*, Barcelona, GRAÓ, 2001.
SEP, *Geometría dinámica*, México, EMAT, 2000.
SEP, *Hoja electrónica de cálculo*, México, EMAT, 2000.
Stewart, I., *Baúl de tesoros matemáticos*, Barcelona, Crítica, 2010.
Rosas, A. y Avenilde Romo, *Metodología en Matemática Educativa. Visiones y reflexiones*, México, Lectorum, 2012.

Consultada para el desarrollo del texto

Alcalá, M., *La construcción del lenguaje matemático*, Barcelona, GRAÓ, 2002.
Assouline, S. y Ann Lupkowski-Shoplik, *Developing mathematical talent*, Texas, Prufrock Press, 2003.
Gallegos, C., *Repensar el aprendizaje de las matemáticas*, Barcelona, GRAÓ, 2005.
Giménez, J., Santos, L. y Da Ponte, J. (coords.), *La actividad matemática en el aula*, Barcelona, GRAÓ, 2004.
Giné, N. y Artur Parcerisa, *Evaluación en la educación secundaria*, Barcelona, GRAÓ, 2000.
Goñi, J. (coord.), *El currículum de matemáticas en los inicios del siglo XXI*, Barcelona, GRAÓ, 2000.
Bishop, A., Jordo Deulofeo y Nuria Gorgorio, *Matemáticas y educación*, Barcelona, GRAÓ, 2000.
Moreno, L. y Guillermina Waldegg, *Aprendizaje, matemáticas y tecnología*, México, Santillana, 2004.
Newman, J., *El mundo de las matemáticas [6 vols.]*, México, Grijalbo, 1994.

Sitios de internet

Ecuaciones cuadráticas. Recuperado el 11 de agosto de Ecuaciones cuadráticas
http://www.ematematicas.net/ecsegundogrado.php?tipo=completa (Consulta: 11 de agosto de 2014).
www.montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE_TEXT_RESOURCE/U10_L1_T3_text_final_es.html (Consulta: 12 de enero de 2015).
www.montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE_TEXT_RESOURCE/U10_L2_T2_text_final_es.html (Consulta: 12 de enero de 2015).
Propiedades de figuras geométricas
http://www.escueladigital.com.uy/geometria/4_figplanas.htm (Consulta: 17 de enero de 2015).
Congruencia de triángulos
www.educarchile.cl/ech/pro/app/detalle?ID=137527 (Consulta: 12 de enero de 2015).
Proporcionalidad numérica
http://www.aulamatematica.com/ESO3/06_Proporc/3ESO_index06.htm (Consulta: 24 de septiembre de 2014).
Función cuadrática
http://www.educar.org/enlared/planes/paginas/funcioncuadra.htm (Consulta: 24 de septiembre de 2014).
Probabilidad: Eventos independientes y eventos mutuamente excluyentes
http://arquimedes.matem.unam.mx/Vinculos/Secundaria/2_segundo/2_Matematicas/2m_b04_t04_s01_descartes/doc/info.html (Consulta: 24 de septiembre de 2014).
Factorización
http://didactalia.net/comunidad/materialeducativo/recurso/factorizacion-de-polinomios-matematicas-4-secundar/149a8887-d2d2-40c1-9453-5d11be2a7854 (Consulta: 25 de septiembre de 2014).
Estudios estadísticos
http://http://www.inegi.org.mx/default.aspx (Consulta: 24 de septiembre de 2014).
Transformaciones geométricas
www.educacionplastica.net/movimien.htm (Consulta: 12 de enero 2015).
Aplicaciones en el diseño
www.museobbaa.com/educacion/archivos/pdf/LA_GEOMETRIA_EN_EL_ARTE.ARTE_Y_MATEMATICAS(ESO).pdf (Consulta: 12 de enero 2015).
Triángulos rectángulos
www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/pitagoricas-ternas.html (Consulta: 12 de enero 2015).
Cuadrados sobre los lados de un triángulo rectángulo
http://www.um.es/docencia/pherrero/mathis/pitagoras/teorema.htm (Consulta: 17 de enero de 2015).
Semejanza de triángulos
www.profesorenlinea.cl/geometria/Semejanza_figuras_planas.html (Consulta: 12 de enero de 2015).
Teorema de Tales
http://didactalia.net/gl/comunidade/materialeducativo/recurso/teorema-de-thales/d0bcb518-8aa3-47e7-9aec-de98abbc7022 (Consulta: 17 de enero de 2015).
Función cuadrática
http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/f2_cuadratica.html (Consulta: 25 de septiembre de 2014).
Llenado de recipientes
http://132.248.17.248/lite/2013/1.3_RecursosAdaptados/Telesecundaria/3_tercero/3_Matematicas/3m_b03_t07_s01_descartes/index.html (Consulta: 25 de septiembre de 2014).
Probabilidad de eventos independientes
thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/28/5.html (Consulta: 12 de enero de 2015).
Sucesiones
http://www.disfrutalasmatematicas.com/algebra/sucesiones-encontrar-regla.html (Consulta: 24 de septiembre de 2014).
Sólidos de revolución
www.cuadernosdigitalesvindel.com/juegos/aprender_volumen.php (Consulta: 12 de enero de 2015).
Pendiente y ángulo de inclinación
http://www.thatquiz.org/es/practicetest?7w29b4dxave8 (Consulta: 18 de junio de 2014).
Trigonometría
http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/trigono.htm (Consulta: 12 de enero de 2015).
Razones trigonométricas
http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/t04_rrtt-90.htm (Consulta: 25 de septiembre de 2014).
Velocidad y aceleración
http://www.secundariaenred.com.mx/b1/mt31-7.pdf (Consulta: 18 de junio de 2014).
Desviación media
http://www.educarchile.cl/ech/pro/app/detalle?id=209007 (Consulta: 16 de enero de 2015).
La importancia de verificar la solución del problema
http://blastorres.webs.com/unidad3.pdf (Consulta: 25 de septiembre de 2014).
Secciones cónicas y secciones cilíndricas
http://arquimedes.matem.unam.mx/lite/2013/1.1_Un100/_Un_003_IntroduccionALaGeometriaAnalitica/index.html (Consulta: 25 de septiembre de 2014).
Fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos
quiz.uprm.edu/tutorial_es/geometria_part6/geometria_part6_right.xhtml (Consulta: 12 de enero de 2015).
Volumen de sólidos
recursostic.educacion.es/secundaria/edad/2esomatematicas/2quincena10/index2_10.htm (Consulta: 12 de enero de 2015).
Operaciones con funciones y su representación gráfica
http://rincones.educarex.es/matematicas/index.php/analisis-mat-i/animaciones-analisis-mat-i/ (Consulta: 25 de septiembre de 2014).
Representación algebraica de una relación
http://mx.tiching.com/explore/contents_topic/analisis_de_situaciones_problematicas_asociadas_a_fenomenos_de_la_fisica_la_biologia_la_economia_y_otras_disciplinas_en_las_que_existe_variacion_lineal_o_cuadratica_entre_dos_conjuntos_de_cantidades/6130 (Consulta: 25 de septiembre de 2014).
Juegos probabilísticos
http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/telesecundaria/tsa01g01v02/u03t04s01.html (Consulta: 25 de septiembre de 2014).

Créditos iconográficos

© Fotolia: pp. 21, 34, 65, 69, 75, 79, 110, 119, 123, 175, 225, 248, 267. © Archivo iconográfico Fernández educación, s.a. de c.v./César Arce: pp. 42, 52, 53, 61, 64, 104, 113, 115, 120, 132, 134, 135, 140, 141, 143, 154, 168, 169, 171, 182, 183, 184, 193, 197, 209, 210, 213, 223, 226, 245, 247, 260, 268.

Fidel Sánchez Sandoval

Matemáticas 3

Construcción del pensamiento

Matemáticas 3, parte primordial de la colección ***Construcción del pensamiento***, persigue potenciar en los jóvenes de tercer grado de secundaria el desarrollo de las competencias matemáticas que les permitan resolver con éxito problemas de su vida escolar y cotidiana, empleando eficentemente herramientas y recursos matemáticos que promueven la creatividad en la búsqueda permanente de soluciones.

La obra está estructurada en bloques de estudio cuyas secciones se basan en el enfoque constructivista, y mediante actividades y ejercicios se despierta el interés de los estudiantes al favorecer la creación de conocimientos y habilidades con significado y sentido propios.

Gracias al estudio de este material, el alumno podrá:

- Reflexionar y analizar el planteamiento de todos y cada uno de los problemas.
- Usar el razonamiento matemático a fin de valorar diferentes alternativas de solución.
- Formular argumentos que validen con claridad y absoluta certeza los resultados.
- Resolver problemas de forma autónoma.
- Participar de manera colaborativa en equipos de trabajo.
- Asumir una actitud positiva hacia el estudio de las matemáticas.

Matemáticas 3 Construcción del pensamiento, útil herramienta que brindará a alumnos y profesores los elementos necesarios para facilitar el proceso de enseñanza aprendizaje.

www.fernandezeditores.com.mx
www.social.adiactiva.com.mx

ISBN: 978-607-498-476-7
S00186

DISTRIBUCIÓN GRATUITA
PROHIBIDA SU VENTA

FERNÁNDEZ editores